Università degli Studi di Pavia

Dipartimento di Matematica

corso di laurea triennale in matematica

Rappresentazioni Lineari di Gruppi Finiti

Relatore

Prof. Alberto Canonaco

Candidato

Ambrogio Maria Bernardelli

Matricola: 447279

Anno Accademico 2018/2019

Indice

Introduzione

La teoria delle rappresentazioni dei gruppi si basa sull'idea di studiare le proprietà dei gruppi attraverso un omomorfismo con il gruppo degli automorfismi di un dato spazio vettoriale. In questo senso, si studia l'azione di un gruppo su uno spazio vettoriale i cui elementi agiscono come operatori lineari. In questo modo si potranno applicare svariati risultati noti dell'algebra lineare a problemi di teoria dei gruppi. Possiamo citare due campi che si servono delle applicazioni della teoria delle rappresentazioni: la fisica, per descrivere ad esempio come il gruppo di simmetria di un sistema fisico interessa le soluzioni delle equazioni che descrivono tale sistema, e la cristallografia, nella descrizione dei gruppi puntuali. In particolare, questa tesi tratta il caso di gruppi di ordine finito e di rappresentazioni in spazi vettoriali di dimensione finita. In queste ipotesi, l'operazione di gruppo viene rappresentata dalla moltiplicazione tra matrici invertibili di dimensione finita. Nel nostro caso, tali matrici saranno a coefficienti in $\mathbb{C}$, in quanto alcuni risultati necessitano di spazi vettoriali a coefficienti in un campo algebricamente chiuso di caratteristica zero.

Vediamo ora più in dettaglio la struttura dell'elaborato.

Nel primo capitolo si introduce il concetto di rappresentazione lineare di un gruppo finito in uno spazio vettoriale e vengono enunciate le prime basilari proprietà. Vengono inoltre presentati oggetti affini a quelli degli spazi vettoriali, riletti nei termini delle rappresentazioni lineari: sottorappresentazioni, somma diretta di rappresentazioni, prodotto tensoriale di rappresentazioni. Un altro importante oggetto matematico che viene definito in questa prima parte è il concetto di rappresentazione irriducibile.

Viene trattata la teoria dei caratteri. Dopo alcune definizioni e proprietà riguardanti il carattere di una rappresentazione, viene enunciato un importante risultato relativo alle rappresentazioni irriducibili: il lemma di Schur. Grazie a questo lemma, si dimostrano alcune relazioni che sussistono fra caratteri di rappresentazioni diverse, in particolare, relazioni di ortogonalità. Tali relazioni sono poi utilizzate per la costruzione di diverse decomposizioni di rappresentazioni.

Si passa poi ad uno studio delle rappresentazioni più incentrato sui gruppi: si trattano rappresentazioni di sottogruppi abeliani e rappresentazioni di prodotti diretti di gruppi. Si introduce infine il concetto di rappresentazione indotta, che verrà ripreso nella seconda parte della tesi. Seguono esempi di gruppi studiati con gli strumenti della teoria delle rappresentazioni.

Si introduce in seguito l'algebra di gruppo e si lega il concetto di rappresentazione a quello di modulo. Si analizza più in dettaglio il caso in cui l'algebra di gruppo sia una $\mathbb{C}$-algebra: se ne studia infatti una decomposizione in algebre di matrici ed il centro. Si dimostrano inoltre proprietà integrali del carattere di una rappresentazione, grazie alle quali si deducono alcuni risultati sui gradi delle rappresentazioni irriducibili.

Successivamente, si studia in dettaglio la rappresentazione indotta, introdotta nella prima parte della tesi. Trattando il carattere della rappresentazione indotta, viene dimostrata la legge di reciprocità di Frobenius. Viene infine presentato un importante risultato: il criterio di irriducibilità di Mackey. La tesi si conclude con alcune applicazioni della teoria delle rappresentazioni indotte.

Capitolo 1

Introduzione alla teoria delle rappresentazioni

1.1 Nozioni preliminari ed esempi

Sia V uno spazio vettoriale che supporremo a coefficienti in $\mathbb{C}$ campo dei numeri complessi se non specificatamente indicato. Si verifica che

$$\mathbf{GL}(\mathrm{V}) = \{f \mid f : \mathrm{V} \to \mathrm{V} \text{ automorfismo di spazi vettoriali}\}$$

è un gruppo con operazione di composizione; in particolare, per le proprietà di isomorfismo tra spazi vettoriali, quando $\dim(\mathrm{V}) = n$, $n \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})$, $\mathbf{GL}(\mathrm{V})$ può essere identificato con il gruppo delle matrici invertibili di ordine n a coefficienti in $\mathbb{C}$ (in quanto $\mathbb{C}$ campo dei coefficienti di V, alla trattazione precedente si può tranquillamente sostituire $\mathbb{C}$ con un qualunque campo $\mathbb{K}$). Indicheremo solitamente con $\mathbb{I}$ l'elemento neutro di $\mathbf{GL}(\mathrm{V})$.
Sia ora G un gruppo, che assumeremo sempre essere di ordine finito. Indicheremo solitamente con 1 il suo elemento neutro. Indicheremo inoltre con ab, per ogni $a, b \in \mathrm{G}$, l'operazione di G. Possiamo ora dare la prima definizione

Definizione. *Sia* G *un gruppo e sia* V *uno spazio vettoriale. Una rappresentazione lineare di* G *in* V *è un omomorfismo di gruppi* $\rho : \mathrm{G} \to \mathbf{GL}(\mathrm{V})$.

Notazione: useremo indistintamente $\rho(s)$ e ρ_s, per ogni $s \in \mathrm{G}$.

Passiamo ora ad alcune definizioni e precisazioni riguardanti lo spazio vettoriale V, che abbiamo già supposto essere a coefficienti in $\mathbb{C}$. Non è eccessivamente riduttivo considerare solamente il caso di uno spazio vettoriale V di dimensione finita: per la maggior parte delle applicazioni, infatti, si è interessati a lavorare con un numero finito di elementi v_i di V, $i \in \mathbb{J}$, $\mathbb{J}$ insieme finito di indici. Sarà dunque sufficiente prendere come nuovo spazio vettoriale W il sottospazio di V generato dalle immagini dei v_i attraverso ρ_s, per ogni $s \in \mathrm{G}$. Se prima $\rho(s) = \rho_s \in \mathbf{GL}(\mathrm{V})$, ora si ha $\rho'(s) = \rho'_s \in \mathbf{GL}(\mathrm{W})$, dove ρ'_s è la restrizione di ρ_s a W. $\rho'_s \in \mathbf{GL}(\mathrm{W})$ per definizione di W e di ρ. Sia infatti $w \in \mathrm{W}$ tale che esistano $t \in \mathrm{G}$ e $j \in \mathbb{J}$ tali che $\rho_t(v_j) = w$. Ma allora $\rho'_s\rho_t(v_j) = \rho_s\rho_t(v_j) = \rho_{st}(v_j) = \rho'_{st}(v_j)$ siccome i v_i sono immagine dei v_i attraverso ρ_1. Siccome $st \in \mathrm{G}$, questo dimostra che $\rho'_s(w) \in \mathrm{W}$, e questo per ogni $w \in \mathrm{W}$ della forma detta e per ogni $s \in \mathrm{G}$. Per linearità, ciò vale per ogni $w \in \mathrm{W}$. D'ora in avanti, se non specificatamente indicato, supporremo ogni spazio vettoriale di dimensione finita.

Definizione. *Siano* G *un gruppo,* V *uno spazio vettoriale di dimensione finita* n *e* $\rho : \mathrm{G} \to \mathbf{GL}(\mathrm{V})$ *una rappresentazione lineare.* V *è detto spazio della rappresentazione* ρ *di* G*, o più semplicemente, con un abuso di notazione, rappresentazione di* G*.* n *è detto grado della rappresentazione.*

Sia dunque V una rappresentazione di G tale che $\dim(\mathrm{V}) = n$, $n \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})$, e sia $(e_i)_{i=1,2,\dots,n}$ una base di V. Possiamo descrivere ρ_s in forma matriciale, per ogni $s \in \mathrm{G}$. Sia dunque R_s la forma matriciale di ρ_s rispetto alla base scelta. Per definizione di ρ si ha

$$\det(\mathrm{R}_s) \neq 0, \qquad \mathrm{R}_{st} = \mathrm{R}_s \mathrm{R}_t \qquad \text{per ogni } s, t \in \mathrm{G}. \tag{$*$}$$

Al contrario, ad un dato un insieme di matrici $(\mathrm{R}_s)_{s \in \mathrm{G}}$ per il quale sia valido $(*)$ corrisponderà una rappresentazione ρ di G in V.
In forma matriciale risulta ad esempio comodo dare la definizione di rappresentazioni isomorfe. In generale vale la seguente definizione.

Definizione. *Siano* G *un gruppo,* V *e* V′ *due spazi vettoriali e* $\rho : \mathrm{G} \to \mathbf{GL}(\mathrm{V})$ *e* $\rho' : \mathrm{G} \to \mathbf{GL}(\mathrm{V}')$ *due rappresentazioni di* G. ρ *e* ρ' *sono dette simili o isomorfe se esiste un isomorfismo di spazi vettoriali* $\tau : \mathrm{V} \to \mathrm{V}'$ *tale che*

$$\tau \circ \rho(s) = \rho'(s) \circ \tau \qquad \textit{per ogni } s \in \mathrm{G}.$$

In forma matriciale risulta, con notazione analoga alla precedente, $\mathrm{T} \cdot \mathrm{R}_s = \mathrm{R}'_s \cdot \mathrm{T}$ per ogni $s \in \mathrm{G}$, che si può riscrivere come

$$\mathrm{R}'_s = \mathrm{T} \cdot \mathrm{R}_s \cdot \mathrm{T}^{-1},$$

ossia le due matrici R_s e R'_s sono simili. Quando due rappresentazioni sono simili, possiamo identificarle attraverso l'isomorfismo τ.

Esempio (rappresentazione banale).
Sia $\rho : \mathrm{G} \to \mathbf{GL}(\mathrm{V})$ una rappresentazione di grado 1. Siccome deve essere $\dim(\mathrm{V}) = 1$, si ha che $\mathrm{V} = \mathbb{C}$ e che $\mathbf{GL}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^* = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \times)$. Siccome G ha ordine finito, ogni suo elemento s ha ordine finito n_s. Per la proprietà di omomorfismo, risulta $\rho(s^{n_s}) = \rho(1) = \mathbb{I} = 1$ e $\rho(s^{n_s}) = \rho(s)^{n_s}$. Si ha quindi che $\rho(s)$ è una radice dell'unità per ogni $s \in \mathrm{G}$. In particolare, se $\rho(s) = 1$ per ogni $s \in \mathrm{G}$, ρ viene detta rappresentazione banale.

Esempio (rappresentazione regolare e generalizzazione).
Sia G un gruppo di ordine g e sia V uno spazio vettoriale tale che $\dim(\mathrm{V}) = g$. Sia inoltre $(e_t)_{t \in \mathrm{G}}$ una base di V. Sia, per ogni $s \in \mathrm{G}$, $\rho_s : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ tale che $\rho_s(e_t) = e_{st}$; per linearità, ρ_s è definita su tutto V e prende il nome di rappresentazione regolare. Siccome $e_s = \rho_s(e_1)$ per ogni $s \in \mathrm{G}$, le immagini di e_1 formano una base di V. Al contrario, sia W una rappresentazione di G e sia $w \in \mathrm{W}$ tale che, al variare di s in G, $\rho'_s(w)$ formi una base di W. W è allora isomorfa alla rappresentazione regolare. Sia infatti $\tau : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ tale che $\tau(e_s) = \rho'_s(w)$. τ è un isomorfismo per definizione di w. Per un generico vettore della base e_t, vale allora

$$\tau \circ \rho_s(e_t) = \tau(e_{st}) = \rho'_{st}(w) = \rho'_s \circ \rho'_t(w) = \rho'_s \circ \tau(e_t).$$

Per linearità, V e W risultano isomorfe.
In generale, sia G un gruppo e X un G-insieme finito, ossia un insieme finito su cui G agisce con un'azione di gruppo. Sia inoltre V uno spazio vettoriale tale che $\dim(\mathrm{V}) = \#(\mathrm{X})$ e sia $(e_x)_{x \in \mathrm{X}}$ una base di V. In modo analogo alla rappresentazione regolare, si può definire, per ogni $s \in \mathrm{G}$, $\rho_s : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ tale che $\rho_s(e_x) = e_{sx}$. Tale rappresentazione è detta rappresentazione delle permutazioni associata all'insieme X.

1.2 Sottorappresentazioni

Siamo ora interessati a dare una definizione dell'analogo dei sottospazi vettoriali per le rappresentazioni. Siano dunque G un gruppo, V una rappresentazione di G e W un sottospazio di V. Per potersi restringere a W, è necessario che l'immagine di W attraverso ρ_s sia contenuta in W per ogni $s \in \mathrm{G}$. Questo concetto si può esprimere con la seguente definizione.

Definizione. *Siano* G *un gruppo,* V *uno spazio vettoriale e* W *un sottospazio di* V*. Sia inoltre* $\rho : \mathrm{G} \to \mathbf{GL}(\mathrm{V})$ *una rappresentazione lineare.* W *si dice stabile (o invariante) sotto l'azione di* G *se per ogni* $w \in \mathrm{W}$ *risulta* $\rho_s(w) \in \mathrm{W}$*, per ogni* $s \in \mathrm{G}$*.*

È facile vedere che $\{0\}$ e V sono stabili sotto l'azione di G.
Siccome $\rho_s \in \mathbf{GL}(\mathrm{V})$, la restrizione $\rho_s^{\mathrm{W}} : \mathrm{W} \to \mathrm{W}$ di ρ_s a W è un isomorfismo per ogni $s \in \mathrm{G}$; per le proprietà di ρ_s risulta inoltre $\rho_s^{\mathrm{W}} \rho_t^{\mathrm{W}} = \rho_{st}^{\mathrm{W}}$, per ogni $s, t \in \mathrm{G}$. Questo ci permette di definire $\rho^{\mathrm{W}} : \mathrm{G} \to \mathbf{GL}(\mathrm{W})$ in maniera naturale come $\rho^{\mathrm{W}}(s) = \rho_s^{\mathrm{W}}$ per ogni $s \in \mathrm{G}$. Vale la seguente definizione.

Definizione. *Siano* G *un gruppo,* V *uno spazio vettoriale e* W *un sottospazio di* V*. Sia inoltre* $\rho : \mathrm{G} \to \mathbf{GL}(\mathrm{V})$ *una rappresentazione lineare di* G *e sia* W *stabile sotto l'azione di* G*. L'omomorfismo* $\rho^{\mathrm{W}} : \mathrm{G} \to \mathbf{GL}(\mathrm{W})$ *è una rappresentazione lineare di* G *in* W *e* W *viene detta sottorappresentazione di* V*.*

Per fissare le idee, vediamo un semplice esempio.

Esempio
Sia G un gruppo e sia V la sua rappresentazione regolare. Sia W il sottospazio di V generato da $w = \sum_{s \in \mathrm{G}} e_s$. Per linearità, risulta $\rho_t(w) = w$ per ogni $t \in \mathrm{G}$. W è quindi una sottorappresentazione di V, in particolare è isomorfa alla rappresentazione banale.

Dati ora G un gruppo, V una rappresentazione di G e W un sottospazio di V stabile sotto l'azione di G, ci si chiede se sia possibile dire qualcosa su altri sottospazi di V. In particolare, dato W, siamo interessati a scrivere V come somma diretta di due sottospazi in modo tale che uno dei due sia proprio W: scriveremo dunque $\mathrm{V} = \mathrm{W} \oplus \mathrm{W}'$ con W' un complementare di W. In questo senso, possiamo enunciare il seguente teorema.

Teorema 1.2.1. *Siano* G *un gruppo,* V *uno spazio vettoriale e* W *un sottospazio di* V*. Sia inoltre* $\rho : \mathrm{G} \to \mathbf{GL}(\mathrm{V})$ *una rappresentazione lineare di* G *in* V *tale che* W *sia stabile sotto l'azione di* G*. Allora esiste un complementare* W^0 *di* W *in* V *che sia stabile sotto l'azione di* G*.*

Dimostrazione. Sia W' un complementare arbitrario di W in V, e sia p la corrispondente proiezione di V su W. Si definisca p^0 come la media dei coniugati di p attraverso gli elementi di G:

$$p^0 = \frac{1}{g} \sum_{t \in \mathrm{G}} \rho_t \cdot p \cdot \rho_t^{-1},$$

con g ordine di G.
Siccome p mappa V in W e W è stabile sotto l'azione di G, ossia ρ_t preserva W, abbiamo che p^0 mappa V in W. Si ha che $\rho_t^{-1} x \in \mathrm{W}$ per ogni $x \in \mathrm{W}$, da cui

$$p \cdot \rho_t^{-1} x = \rho_t^{-1} x, \qquad \rho_t \cdot p \cdot \rho_t^{-1} x = x, \qquad p^0 x = x.$$

p^0 è quindi una proiezione di V su W, alla quale corrisponde un certo complementare W^0 di W. Abbiamo inoltre

$$\rho_s \cdot p^0 = p^0 \cdot \rho_s \qquad \text{per ogni } s \in \mathrm{G}.$$

Infatti, calcolando $\rho_s \cdot p^0 \cdot \rho_s^{-1}$, troviamo:

$$\rho_s \cdot p^0 \cdot \rho_s^{-1} = \frac{1}{g} \sum_{t \in \mathrm{G}} \rho_s \cdot \rho_t \cdot p \cdot \rho_t^{-1} \cdot \rho_s^{-1} = \frac{1}{g} \sum_{t \in \mathrm{G}} \rho_{st} \cdot p \cdot \rho_{st}^{-1} = p^0.$$

Se ora $x \in \mathrm{W}^0$, abbiamo $p^0 x = 0$ per definizione di W^0. Da ciò segue che $p^0 \cdot \rho_s x = \rho_s \cdot p^0 x = 0$, il che implica $\rho_s x \in \mathrm{W}^0$, per ogni $s \in \mathrm{G}$, ossia W^0 è stabile sotto l'azione di G. ∎

Osservazione: nel caso in cui V sia dotato di un prodotto scalare $(u \mid v)$, con $u, v \in \mathrm{V}$, il Teorema 1.2.1 può essere riscritto in modo tale che W^0 sia il complementare ortogonale di W attraverso tale prodotto scalare, a meno di suppore che quest'ultimo sia invariante sotto l'azione di G, ossia che $(\rho_s u \mid \rho_s v) = (u \mid v)$ per ogni $s \in \mathrm{G}$ e per ogni $u, v \in \mathrm{V}$. Ci si può sempre ricondurre a questo caso sostituendo il prodotto scalare $(\cdot \mid \cdot)$ di V con un nuovo prodotto scalare $((u \mid v)) = \sum_{s \in \mathrm{G}} (\rho_s u \mid \rho_s v)$. In questo caso, il complementare ortogonale W^0 di W è stabile sotto l'azione di G.
È importante notare che, se (e_i) è una base ortonormale di V, il fatto che il prodotto scalare sia invariante sotto l'azone di G significa che la matrice associata a ρ_s rispetto alla base (e_i) è una matrice unitaria, questo per ogni $s \in \mathrm{G}$.

Dal Teorema 1.2.1, segue che ogni elemento $v \in \mathrm{V}$ può essere scritto come $v = w^0 + w$ con w^0 e w proiezioni di v rispettivamente su W^0 e W. Siccome W^0 e W sono stabili sotto l'azione di G, risulta $\rho_s(w^0) \in \mathrm{W}^0$ e $\rho_s(w) \in \mathrm{W}$, per ogni $s \in \mathrm{G}$. $\rho_s(w^0)$ e $\rho_s(w)$ sono dunque le proiezioni di $\rho_s(v)$ rispettivamente su W^0 e su W. La rappresentazione V risulta quindi essere determinata dalle sottorappresentazioni W^0 e W; scriveremo dunque $\mathrm{V} = \mathrm{W}^0 \oplus \mathrm{W}$. Analogamente, si può definire la somma diretta di un numero finito qualsiasi di rappresentazioni.

1.3 Rappresentazioni irriducibili

Siano G un gruppo, V uno spazio vettoriale e $\rho : \mathrm{G} \to \mathbf{GL}(\mathrm{V})$ una rappresentazione lineare di G in V. Abbiamo già osservato che $\{0\}$ e V sono due sottorappresentazioni di V, in quanto sottospazi stabili sotto l'azione di G per qualunque rappresentazione ρ. È possibile che queste siano le uniche sottorappresentazioni, ossia che la rappresentazione V non presenti sottorappresentazioni non banali. Possiamo definire questo tipo di rappresentazioni nel modo seguente.

Definizione. *Siano* G *un gruppo,* V *uno spazio vettoriale non nullo e* $\rho : \mathrm{G} \to \mathbf{GL}(\mathrm{V})$ *una rappresentazione lineare di* G *in* V. V *viene detta rappresentazione irriducibile o rappresentazione semplice se non esistono sottospazi vettoriali non banali di* V *che siano stabili sotto l'azione di* G.

Dal Teorema 1.2.1 segue che una rappresentazione irriducibile V può essere scritta come somma diretta di rappresentazioni solo in maniera banale $\mathrm{V} = 0 \oplus \mathrm{V}$. In questo senso, una volta scritta una data rappresentazione V come una certa somma diretta di sottorappresentazioni, possiamo iterare il processo ad ogni sottorappresentazione fino ad ottenere una somma diretta di sottorappresentazioni irriducibili. Questa idea è enunciata nel seguente teorema.

Teorema 1.3.1. *Ogni rappresentazione è somma diretta di rappresentazioni irriducibili.*

Dimostrazione. Sia V una rappresentazione lineare di G. Dimostreremo il teorema per induzione sulla dimensione di V.
Se $\dim(\mathrm{V}) = 0$, il teorema è ovvio (0 è infatti la somma diretta della famiglia vuota di rappresentazioni irriducibili).
Se $\dim(\mathrm{V}) = 1$, V è necessariamente una rappresentazione irriducibile, perché non esistono sottospazi vettoriali non banali di V.
Supponiamo ora che $\dim(\mathrm{V}) \geq 2$.
Se V è irriducibile, non c'è niente da dimostrare. In caso contrario, per il Teorema 1.2.1, V può essere decomposto come la somma diretta $\mathrm{V}' \oplus \mathrm{V}''$ con $\dim(\mathrm{V}') < \dim(\mathrm{V})$ e $\dim(\mathrm{V}'') < \dim(\mathrm{V})$. Per ipotesi induttiva, V' e V'' sono somma diretta di rappresentazioni irriducibili, e così anche V, essendo somma diretta di V' e V''. □

Osservazione: in generale, data una rappresentazione V di grado n, non esiste un'unica decomposizione di V come somma diretta di rappresentazioni irriducibili. Dato un gruppo G, sia $\rho(s) = \mathbb{I}$ per ogni $s \in \mathrm{G}$. Allora, per ogni scelta di una base $(v_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ di V, possiamo scrivere $\mathrm{V} = \mathrm{V}_1 \oplus \mathrm{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathrm{V}_n$, dove V_j è il sottospazio vettoriale generato da v_j. Tale sottorappresentazione ha grado 1 ed è quindi irriducibile, questo per ogni $j = 1, 2, ..., n$. Ad ogni scelta diversa di $(v_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ corrisponde una diversa decomposizione.

1.4 Prodotto tensoriale di due rappresentazioni

Note sul prodotto tensoriale

Richiamiamo brevemente alcuni concetti riguardanti il prodotto tensoriale che ci saranno utili nella trattazione del prodotto tensioriale di due rappresentazioni.

Definizione. *Sia* A *un anello commutativo e siano* V *e* W *due* A*-moduli. Si dice prodotto tensoriale di* V *e* W *un* A*-modulo* $\mathrm{V} \otimes \mathrm{W}$ *e una mappa bilineare di* A*-moduli* $\otimes : \mathrm{V} \times \mathrm{W} \to \mathrm{V} \otimes \mathrm{W}$ *denotata da* $(v, w) \longmapsto v \otimes w$ *tale che valga la seguente proprietà:*

> *dato* X *un* A*-modulo e* $\varphi : \mathrm{V} \times \mathrm{W} \to \mathrm{X}$ *una mappa bilineare di* A*-moduli, allora esiste un unico omomorfismo* $\Phi : \mathrm{V} \otimes \mathrm{W} \to \mathrm{X}$ *tale che* $\varphi(v, w) = \Phi(v \otimes w)$ *per ogni* $v \in \mathrm{V}$*,* $w \in \mathrm{W}$*.*

Tale proprità viene detta di universalità.

Si dimostra che il prodotto tensoriale così definito esiste e che è unico a meno di isomorfismo. Si dimostrano inoltre alcune utili proprietà. Consideriamo V e W due spazi vettoriali di dimensione finita.

Proprietà:

(a) sia $(v_i)_i$ una base di V e $(w_j)_j$ una base di W. Allora $(v_i \otimes w_j)_{i,j}$ è una base di $\mathrm{V} \otimes \mathrm{W}$.

(b) $\dim(\mathrm{V} \otimes \mathrm{W}) = \dim(\mathrm{V}) \cdot \dim(\mathrm{W})$. Questo discende dalla proprietà (a).

Torniamo ora alle rappresentazioni. Sia G un gruppo, siano V_1 e V_2 due spazi vettoriali e siano $\rho^1 : \mathrm{G} \to \mathbf{GL}(\mathrm{V}_1)$ e $\rho^2 : \mathrm{G} \to \mathbf{GL}(\mathrm{V}_2)$ due rappresentazioni di G. Per ogni $s \in \mathrm{G}$, possiamo quindi definire $\rho_s \in \mathbf{GL}(\mathrm{V}_1 \otimes \mathrm{V}_2)$ in questo modo:

$$\rho_s(v_1 \otimes v_2) = \rho^1_s(v_1) \otimes \rho^2_s(v_2), \qquad \text{per ogni } v_1 \in \mathrm{V}_1,\ v_2 \in \mathrm{V}_2\ .$$

ρ_s risulta ben definita: infatti, con riferimento alla proprietà di universalità, siano

$$\mathrm{X} = \mathrm{V}_1 \otimes \mathrm{V}_2 \qquad \text{e} \qquad \varphi(v_1, v_2) = \rho^1_s(v_1) \otimes \rho^2_s(v_2).$$

φ risulta essere una mappa bilineare: ρ^1_s, ρ^2_s sono mappe lineari per ogni $s \in \mathrm{G}$ e il prodotto tensoriale è una mappa bilineare per definizione. Da ciò e dalla proprietà di universalità segue che esiste unico ρ_s omomorfismo di spazi vettoriali. Il fatto che ρ_s risulti essere un isomorfismo per ogni $s \in \mathrm{G}$ segue dalla definizione di prodotto tensoriale e dal fatto che ρ^1_s e ρ^2_s sono isomorfismi per ogni $s \in \mathrm{G}$. Possiamo quindi scrivere

$$\rho_s = \rho^1_s \otimes \rho^2_s, \qquad \text{per ogni } s \in \mathrm{G}.$$

Diamo inoltre la seguente definizione.

Definizione. *Sia G un gruppo, siano* V_1 *e* V_2 *due spazi vettoriali e siano* $\rho^1 : \mathrm{G} \to \mathbf{GL}(\mathrm{V}_1)$ *e* $\rho^2 : \mathrm{G} \to \mathbf{GL}(\mathrm{V}_2)$ *due rappresentazioni di* G*.* $\rho := \rho^1 \otimes \rho^2 : \mathrm{G} \to \mathbf{GL}(\mathrm{V}_1 \otimes \mathrm{V}_2)$ *definisce una rappresentazione lineare di* G *su* $\mathrm{V}_1 \otimes \mathrm{V}_2$ *prodotto tensoriale delle date rappresentazioni.*

Vediamo che questa definizione si può tradurre in forma matriciale nel modo seguente. Siano $(e_{k_1})_{k_1 \in \mathbb{J}_1}$ una base dello spazio vettoriale V_1 e $(e_{k_2})_{k_2 \in \mathbb{J}_2}$ una base dello spazio vettoriale V_2, con $\mathbb{J}_1$, $\mathbb{J}_2$ insiemi finiti di indici. Rispetto a queste basi, possiamo associare a ρ^1_s e ρ^2_s le matrici $(r_{i_1 j_1}(s))_{i_1, j_1 \in \mathbb{J}_1}$ e $(r_{i_2 j_2}(s))_{i_2, j_2 \in \mathbb{J}_2}$ rispettivamente, per ogni $s \in \mathrm{G}$. Per la proprietà (a), sappiamo che $(e_{k_1} \otimes e_{k_2})_{k_1 \in \mathbb{J}_1, k_2 \in \mathbb{J}_2}$

è una base per $V_1 \otimes V_2$. Scriveremo la matrice associata a $\rho_s = \rho_s^1 \otimes \rho_s^2$ rispetto a questa base, per ogni $s \in G$. Dalle formule

$$\rho_s^1(e_{j_1}) = \sum_{i_1 \in \mathbb{J}_1} r_{i_1 j_1}(s) \cdot e_{i_1}, \qquad \rho_s^2(e_{j_2}) = \sum_{i_2 \in \mathbb{J}_2} r_{i_2 j_2}(s) \cdot e_{i_2},$$

risulta

$$\rho_s(e_{j_1} \otimes e_{j_2}) = \sum_{i_1 \in \mathbb{J}_1, i_2 \in \mathbb{J}_2} r_{i_1 j_1}(s) r_{i_2 j_2}(s) \cdot e_{i_1} \otimes e_{i_2}.$$

Rispetto alla base $(e_{k_1} \otimes e_{k_2})_{k_1 \in \mathbb{J}_1, k_2 \in \mathbb{J}_2}$, la matrice associata a ρ_s è dunque il prodotto tensoriale delle matrici ρ_s^1 e ρ_s^2 dato da $(r_{i_1 j_1}(s) r_{i_2 j_2}(s))_{i_1, j_1 \in \mathbb{J}_1, i_2, j_2 \in \mathbb{J}_2}$, per ogni $s \in G$.

Quadrato simmetrico e quadrato alterno

Vediamo ora una particolare decomposizione del prodotto tensoriale $V_1 \otimes V_2$ nel caso in cui $V_1 = V_2 = V$. Siano dunque G un gruppo, V una rappresentazione di grado n e $V \otimes V$ il prodotto tensoriale di V con se stessa. Data $(e_i)_{i \in \{1,2,...,n\}}$ una base di V, sia $\vartheta : V \otimes V \to V \otimes V$ endomorfismo tale che

$$\vartheta(e_i \otimes e_j) = e_j \otimes e_i, \qquad \text{per ogni } i, j \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Per linearità, ϑ risultà così definito su tutto $V \otimes V$ come $\vartheta(v \otimes w) = w \otimes v$, è cioè indipendente dalla scelta della base. Inoltre, ϑ è un'involuzione, ossia $\vartheta = \vartheta^{-1}$, ed è quindi un automorfismo. Definiamo ora i seguenti sottoinsiemi di $V \otimes V$:

$$\mathbf{Sym}^2(V) = \{x \in V \otimes V : \vartheta(x) = x\},$$
$$\mathbf{Alt}^2(V) = \{x \in V \otimes V : \vartheta(x) = -x\}.$$

Per linearità di ϑ, $\mathbf{Sym}^2(V)$ e $\mathbf{Alt}^2(V)$ sono due sottospazi vettoriali di $V \otimes V$.

Definizione. $\mathbf{Sym}^2(V)$ *e* $\mathbf{Alt}^2(V)$ *sono detti rispettivamente quadrato simmetrico e quadrato alterno della rappresentazione* V.

Possiamo costruire una base per ciascuno di questi due sottospazi attraverso la base di $V \otimes V$. Sia infatti $(e_i)_{1 \le i \le n}$ una base di V. Siccome $(e_i \otimes e_j)_{1 \le i,j \le n}$ è una base per $V \otimes V$, $(e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i)_{1 \le i \le j \le n}$ risulta essere una base per $\mathbf{Sym}^2(V)$. Analogamente, $(e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i)_{1 \le i < j \le n}$ risulta essere una base per $\mathbf{Alt}^2(V)$. Inoltre si ha che

$$\dim(\mathbf{Sym}^2(V)) = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \dim(\mathbf{Alt}^2(V)) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Siccome $\mathbf{Sym}^2(V) \cap \mathbf{Alt}^2(V) = \{0\}$, risulta $\dim(\mathbf{Sym}^2(V) \oplus \mathbf{Alt}^2(V)) = n^2 = \dim(V \otimes V)$. Lo spazio $V \otimes V$ si decompone quindi come somma diretta dei due sottospazi appena definiti. Possiamo scrivere

$$V \otimes V = \mathbf{Sym}^2(V) \oplus \mathbf{Alt}^2(V).$$

Sia ora G un gruppo e sia $\rho : G \to \mathbf{GL}(V)$ una rappresentazione lineare di G in V. Sia inoltre $R := \rho \otimes \rho : G \to \mathbf{GL}(V \otimes V)$ una rappresentazione del prodotto tensoriale. Si ha che

$$\begin{aligned} R_s(e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i) &= R_s(e_i \otimes e_j) + R_s(e_j \otimes e_i) = \rho_s(e_i) \otimes \rho_s(e_j) + \rho_s(e_j) \otimes \rho_s(e_i) = \\ &= \rho_s(e_j) \otimes \rho_s(e_i) + \rho_s(e_i) \otimes \rho_s(e_j) = \vartheta(\rho_s(e_i) \otimes \rho_s(e_j) + \rho_s(e_j) \otimes \rho_s(e_i)) = \\ &= \vartheta(R_s(e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i)). \end{aligned}$$

Per linearità vale che $R_s(x) = \vartheta(R_s(x))$ per ogni $x \in \mathbf{Sym}^2(V)$. Ciò significa che per ogni $x \in \mathbf{Sym}^2(V)$ anche $R_s(x)$ appartiene a $\mathbf{Sym}^2(V)$, ossia $\mathbf{Sym}^2(V)$ è stabile sotto l'azione di G.

Lo stesso argomento mostra che anche $\mathbf{Alt}^2(\mathrm{V})$ è stabile sotto l'azione di G, vale infatti

$$\begin{aligned}R_s(e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i) &= R_s(e_i \otimes e_j) - R_s(e_j \otimes e_i) = \rho_s(e_i) \otimes \rho_s(e_j) - \rho_s(e_j) \otimes \rho_s(e_i) = \\ &= -(\rho_s(e_j) \otimes \rho_s(e_i) - \rho_s(e_i) \otimes \rho_s(e_j)) = -\vartheta(\rho_s(e_i) \otimes \rho_s(e_j) - \rho_s(e_j) \otimes \rho_s(e_i)) = \\ &= -\vartheta(R_s(e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i)).\end{aligned}$$

Capitolo 2

Teoria dei caratteri

2.1 Carattere di una rappresentazione e primi risultati

Definiamo ora un importante oggetto della teoria delle rappresentazioni: il carattere di una rappresentazione.

Definizione. *Siano* G *un gruppo,* V *uno spazio vettoriale e* $\rho : \mathrm{G} \to \mathbf{GL}(\mathrm{V})$ *una rappresentazione lineare di* G *in* V*. Sia* $\chi_\rho : \mathrm{G} \to \mathbb{C}$ *la funzione tale che*

$$\chi_\rho(s) = \mathrm{Tr}(\rho_s), \qquad \textit{per ogni } s \in \mathrm{G}.$$

χ_ρ*, che indicheremo semplicemente con* χ *se ciò non creerà confusione, è detto carattere della rappresentazione* ρ*.*

Vediamo per prima cosa alcune proprietà elementari del carattere di una rappresentazione, ricordando la definizione di funzione di classe.

Definizione. *Sia* G *un gruppo e sia* $f : \mathrm{G} \to \mathbb{C}$ *una funzione costante sulle classi di coniugio, ossia* $f(tst^{-1}) = f(s)$ *per ogni* $s, t \in \mathrm{G}$*.* f *è detta funzione di classe su* G*.*

Raggruppiamo le prime proprietà del carattere nella seguente proposizione.

Proposizione 2.1.1. *Siano* G *un gruppo,* V *uno spazio vettoriale e* $\rho : \mathrm{G} \to \mathbf{GL}(\mathrm{V})$ *una rappresentazione lineare di* G *in* V *di grado* n*. Se* χ *è il carattere di* ρ*, abbiamo che:*

(i) $\chi(1) = n$,

(ii) $\chi(s^{-1}) = \chi(s)^*$ *per ogni* $s \in \mathrm{G}$,

(iii) $\chi(tst^{-1}) = \chi(s)$ *per ogni* s, $t \in \mathrm{G}$*, ossia* χ *è una funzione di classe.*

Dove con z^* *indicheremo il complesso coniugato di* z*, per ogni* $z \in \mathbb{C}$*.*

Dimostrazione.

(i) Abbiamo che $\rho(1) = \mathbb{I}$, e $\mathrm{Tr}(\mathbb{I}) = n$ visto che V ha dimensione n.

(ii) Osserviamo che, siccome G è finito, ρ_s ha ordine finito; di conseguenza ciò è vero per i suoi autovalori $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, che hanno perciò modulo uguale a 1. Abbiamo quindi

$$\chi(s)^* = \mathrm{Tr}(\rho_s)^* = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i^* = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i^{-1} = \mathrm{Tr}(\rho_s^{-1}) = \mathrm{Tr}(\rho_{s^{-1}}) = \chi(s^{-1}).$$

(iii) È conseguenza diretta della proprietà di invarianza per similitudine della traccia.

□

Nel capitolo precedente abbiamo studiato le proprietà della somma diretta di rappresentazioni e del prodotto tensoriale di rappresentazioni; vediamo quindi come si comporta il carattere rispetto a queste operazioni grazie alla proposizione seguente.

Proposizione 2.1.2. *Sia* G *un gruppo e siano* V_1 *e* V_2 *due spazi vettoriali di dimensione* n_1 *e* n_2 *rispettivamente. Siano inoltre* $\rho^1 : \mathrm{G} \to \mathbf{GL}(\mathrm{V}_1)$ *e* $\rho^2 : \mathrm{G} \to \mathbf{GL}(\mathrm{V}_2)$ *due rappresentazioni lineari di* G*, e siano* χ_1 *e* χ_2 *i loro caratteri. Allora:*

(i) *il carattere* χ *della rappresentazione* $\mathrm{V}_1 \oplus \mathrm{V}_2$ *è uguale a* $\chi_1 + \chi_2$*,*

(ii) *il carattere* ψ *della rappresentazione* $\mathrm{V}_1 \otimes \mathrm{V}_2$ *è uguale a* $\chi_1 \cdot \chi_2$*.*

Dimostrazione.

(i) Siano date ρ_s^1 e ρ_s^2 in forma matriciale: R_s^1 e R_s^2 rispettivamente, per ogni $s \in \mathrm{G}$. La rappresentazione $\mathrm{V}_1 \oplus \mathrm{V}_2$ in forma matriciale è allora data da

$$\mathrm{R}_s = \begin{pmatrix} \mathrm{R}_s^1 & 0 \\ 0 & \mathrm{R}_s^2 \end{pmatrix},$$

da cui $\mathrm{Tr}(\mathrm{R}_s) = \mathrm{Tr}(\mathrm{R}_s^1) + \mathrm{Tr}(\mathrm{R}_s^2)$, cioè $\chi(s) = \chi_1(s) + \chi_2(s)$.

(ii) Si procede in modo analogo. Dati $\mathbb{J}_1 = \{1, 2, ..., n_1\}$ e $\mathbb{J}_2 = \{1, 2, ..., n_2\}$, abbiamo

$$\chi_1(s) = \sum_{i_1 \in \mathbb{J}_1} r_{i_1 i_1}(s), \qquad \chi_2(s) = \sum_{i_2 \in \mathbb{J}_2} r_{i_2 i_2}(s),$$
$$\psi(s) = \sum_{i_1 \in \mathbb{J}_1, i_2 \in \mathbb{J}_2} r_{i_1 i_1}(s) r_{i_2 i_2}(s) = \chi_1(s) \cdot \chi_2(s).$$

□

In particolare, si era parlato nel primo capitolo del quadrato simmetrico e del quadrato alterno di una data rappresentazione. Per queste due particolari rappresentazioni, si possono dimostrare tre importanti uguaglianze che mettono in relazione i loro caratteri con quello della rappresentazione data.

Proposizione 2.1.3. *Siano* G *un gruppo,* V *uno spazio vettoriale e* $\rho : \mathrm{G} \to \mathbf{GL}\,(\mathrm{V})$ *una rappresentazione lineare di* G*, sia inoltre* χ *il suo carattere. Sia* χ_σ^2 *il carattere del quadrato simmetrico* $\mathbf{Sym}^2(\mathrm{V})$ *di* V*, e sia* χ_α^2 *quello di* $\mathbf{Alt}^2(\mathrm{V})$*. Per ogni* $s \in \mathrm{G}$*, si ha*

$$\chi_\sigma^2(s) = \frac{1}{2}(\chi(s)^2 + \chi(s^2)),$$
$$\chi_\alpha^2(s) = \frac{1}{2}(\chi(s)^2 - \chi(s^2)).$$

Inoltre si ha $\chi_\sigma^2 + \chi_\alpha^2 = \chi^2$*.*

Dimostrazione. Sia $s \in \mathrm{G}$. Può essere scelta una base $\{e_i\}_{i \in \mathbb{J}}$, con $\mathbb{J}$ insieme finito di indici, formata da autovettori di ρ_s; ciò discende ad esempio dal fatto che ρ_s può essere rappresentato da una matrice unitaria. Abbiamo quindi $\rho_s e_i = \lambda_i e_i$, con $\lambda_i \in \mathbb{C}$ per ogni $i \in \mathbb{J}$, e quindi

$$\chi(s) = \sum_{i \in \mathbb{J}} \lambda_i, \qquad \chi(s^2) = \sum_{i \in \mathbb{J}} \lambda_i^2.$$

D'altra parte, abbiamo anche che

$$(\rho_s \otimes \rho_s)(e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i) = \lambda_i \lambda_j \cdot (e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i),$$
$$(\rho_s \otimes \rho_s)(e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i) = \lambda_i \lambda_j \cdot (e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i),$$

per ogni $i, j \in \mathbb{J}$, da cui

$$\chi_\sigma^2(s) = \sum_{i,j \in \mathbb{J}, i \leq j} \lambda_i \lambda_j = \sum_{i \in \mathbb{J}} \lambda_i^2 + \sum_{i,j \in \mathbb{J}, i<j} \lambda_i \lambda_j = \frac{1}{2}\Big(\sum_{i \in \mathbb{J}} \lambda_i\Big)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i \in \mathbb{J}} \lambda_i^2 = \frac{1}{2}(\chi(s)^2 + \chi(s^2)),$$
$$\chi_\alpha^2(s) = \sum_{i,j \in \mathbb{J}, i<j} \lambda_i \lambda_j = \frac{1}{2}\Big(\sum_{i \in \mathbb{J}} \lambda_i\Big)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i \in \mathbb{J}} \lambda_i^2 = \frac{1}{2}(\chi(s)^2 - \chi(s^2)).$$

Inoltre

$$\chi_\sigma^2(s) + \chi_\alpha^2(s) = \frac{1}{2}(\chi(s)^2 + \chi(s^2)) + \frac{1}{2}(\chi(s)^2 - \chi(s^2)) = \chi(s)^2.$$

Questo vale per ogni $s \in \mathrm{G}$. □

Osservazione: l'uguaglianza $\chi_\sigma^2 + \chi_\alpha^2 = \chi^2$ rispecchia il fatto che $\mathrm{V} \otimes \mathrm{V}$ sia la somma diretta di $\mathbf{Sym}^2(\mathrm{V})$ e $\mathbf{Alt}^2(\mathrm{V})$: utilizzando infatti il punto (ii) della Proposizione 2.1.2 per determinare il carattere di $\mathrm{V} \otimes \mathrm{V}$ e il punto (i) della Proposizione 2.1.2, ricordando appunto che

$$\mathrm{V} \otimes \mathrm{V} = \mathbf{Sym}^2(\mathrm{V}) \oplus \mathbf{Alt}^2(\mathrm{V}),$$

si arriva alla tesi.

2.2 Lemma di Schur

La seguente proposizione, che dà il titolo a questa sezione, è un importante risultato riguardante l'isomorfismo di rappresentazioni, in particolare di rappresentazioni irriducibili.

Proposizione 2.2.1 (Lemma di Schur)**.** *Siano $\rho^1 : \mathrm{G} \to \mathbf{GL}(\mathrm{V}_1)$ e $\rho^2 : \mathrm{G} \to \mathbf{GL}(\mathrm{V}_2)$ due rappresentazioni irriducibili di un gruppo G negli spazi vettoriali V_1 e V_2 rispettivamente e sia $f : \mathrm{V}_1 \to \mathrm{V}_2$ lineare tale che $\rho_s^2 \circ f = f \circ \rho_s^1$ per ogni $s \in \mathrm{G}$. Allora:*

(1) *se ρ^1 e ρ^2 non sono isomorfe, si ha $f = 0$.*

(2) *se $\mathrm{V}_1 = \mathrm{V}_2$ e $\rho^1 = \rho^2$, f è un'omotetia, ovvero un multiplo scalare dell'identità.*

Dimostrazione. Per il caso $f = 0$ non c'è nulla da dimostrare.
Supponiamo dunque $f \neq 0$ e sia W_1 il suo nucleo. Per $x \in \mathrm{W}_1$ risulta $f\rho_s^1 x = \rho_s^2 f x = 0$, da cui $\rho_s^1 x \in \mathrm{W}_1$, ossia W_1 è stabile sotto l'azione di G. Siccome V_1 è irriducibile, W_1 è uguale a 0 oppure a V_1. Il caso $\mathrm{W}_1 = \mathrm{V}_1$ è da escludere perché implicherebbe $f = 0$.
Sia ora W_2 l'immagine di f. Sia $z \in \mathrm{W}_2$, questo significa che $z = fy$ per un certo $y \in \mathrm{V}_1$. Risulta che $\rho_s^2 z = \rho_s^2 f y = f \rho_s^1 y \in \mathrm{W}_2$, da cui $\rho_s^2 z \in \mathrm{W}_2$, ossia W_2 è stabile sotto l'azione di G. Siccome V_2 è irriducibile, W_2 è uguale a 0 oppure a V_1. Il caso $\mathrm{W}_2 = 0$ è da escludere poichè implicherebbe $f = 0$.
Abbiamo dunque che $\mathrm{W}_1 = 0$ e $\mathrm{W}_2 = \mathrm{V}_2$: f è un isomorfismo, il che prova (1).
Supponiamo ora che $\mathrm{V}_1 = \mathrm{V}_2$, $\rho^1 = \rho^2$, e sia λ un autovalore di f: ne esiste almeno uno visto che

il campo degli scalari è $\mathbb{C}$. Sia ora $f' = f - \Lambda$ (dove $\Lambda : \mathrm{V}_1 \to \mathrm{V}_1$ tale che $\Lambda x = \lambda x$). Siccome λ è autovalore di f, il nucleo di f' è diverso da 0; d'altra parte per f' vale $\rho_s^1 \circ f' = f' \circ \rho_s^1$:

$$\rho_s^1 \circ f'(x) = \rho_s^1 \circ (f - \Lambda)(x) = \rho_s^1 \circ f(x) - \rho_s^1 \circ \Lambda(x) = \rho_s^1 \circ f(x) - \rho_s^1 \lambda x =$$

$$= f \circ \rho_s^1(x) - \lambda \rho_s^1 x = (f - \Lambda)\rho_s^1 x = f' \circ \rho_s^1(x).$$

La prima parte del lemma prova quindi che $f' = 0$ (infatti, il nucleo di f' è diverso da 0, perciò è necessariamente uguale a V_1). f è dunque uguale a Λ, ossia un'omotetia di rapporto λ. □

Un'applicazione diretta del lemma di Schur è il seguente corollario.

Corollario 2.2.2. *Nelle ipotesi del lemma di Schur* (Proposizione 2.2.1)*, sia $h : \mathrm{V}_1 \to \mathrm{V}_2$ lineare, e si ponga:*

$$h^0 = \frac{1}{g} \sum_{t \in \mathrm{G}} (\rho_t^2)^{-1} \cdot h \cdot \rho_t^1, \qquad \textit{con } g \textit{ ordine di } \mathrm{G}.$$

Allora:

(1) *se ρ^1 e ρ^2 non sono isomorfe, si ha $h^0 = 0$.*

(2) *se $\mathrm{V}_1 = \mathrm{V}_2$ e $\rho^1 = \rho^2$, h^0 è un'omotetia di rapporto* $(1/n)\,\mathrm{Tr}\,(h)$*, con* $n = \dim(\mathrm{V}_1)$*.*

Dimostrazione. Si ha che $\rho_s^2 \circ h^0 = h^0 \circ \rho_s^1$ per ogni $s \in \mathrm{G}$. Infatti:

$$\left(\rho_s^2\right)^{-1} h^0 \rho_s^1 = \frac{1}{g} \sum_{t \in \mathrm{G}} \left(\rho_s^2\right)^{-1} \left(\rho_t^2\right)^{-1} h \rho_t^1 \rho_s^1 =$$
$$= \frac{1}{g} \sum_{t \in \mathrm{G}} \left(\rho_{ts}^2\right)^{-1} h \rho_{ts}^1 = h^0.$$

Applicando il lemma di Schur (Proposizione 2.2.1) con $f = h^0$ possiamo osservare che nel caso (1) $h^0 = 0$, e nel caso (2) $h^0 = \Lambda$ è un'omotetia di rapporto λ. Inoltre, nel secondo caso, si ha:

$$\mathrm{Tr}\left(h^0\right) = \frac{1}{g} \sum_{t \in \mathrm{G}} \mathrm{Tr}\left(\left(\rho_t^1\right)^{-1} h \rho_t^1\right) = \frac{1}{g} \sum_{t \in \mathrm{G}} \mathrm{Tr}\,(h) = \mathrm{Tr}\,(h)\,,$$

e siccome $\mathrm{Tr}\,(\Lambda) = n \cdot \lambda$, si ha $\lambda = (1/n)\,\mathrm{Tr}\,(h)$. □

Supponiamo ora di avere ρ^1 e ρ^2 in forma matriciale:

$$\rho_t^1 = \left(r_{i_1 j_1}(t)\right)_{i_1, j_1 \in \mathbb{J}_1}, \qquad \rho_t^2 = \left(r_{i_2 j_2}(t)\right)_{i_2, j_2 \in \mathbb{J}_2},$$

dove $\mathbb{J}_1 = \{1, 2, ..., n_1\}$, $n_1 = \dim(\mathrm{V}_1)$ e $\mathbb{J}_2 = \{1, 2, ..., n_2\}$, $n_2 = \dim(\mathrm{V}_2)$. La mappa lineare h è anch'essa definita da una matrice $(x_{i_2 i_1})_{i_2 \in \mathbb{J}_2, i_1 \in \mathbb{J}_1}$ e allo stesso modo $h^0 = \left(x_{i_2 i_1}^0\right)_{i_2 \in \mathbb{J}_2, i_1 \in \mathbb{J}_1}$. Questo ci permette di enunciare i seguenti corollari, riguardanti i due distinti casi del Corollario 2.2.2.

Corollario 2.2.3. *Con riferimento al* Corollario 2.2.2 *e alla scrittura in forma matriciale precedente, nel caso* (1) *si ha:*

$$\frac{1}{g} \sum_{t \in \mathrm{G}} r_{i_2 j_2}\left(t^{-1}\right) r_{j_1 i_1}(t) = 0$$

per una scelta arbitraria di $i_1, j_1 \in \mathbb{J}_1$, $i_2, j_2 \in \mathbb{J}_2$.

Dimostrazione. Per definizione di h^0 risulta

$$x_{i_2 i_1}^0 = \frac{1}{g} \sum_{t, j_1, j_2} r_{i_2 j_2}\left(t^{-1}\right) x_{j_2 j_1} r_{j_1 i_1}(t) \qquad \text{sommando per } i_1, j_1 \in \mathbb{J}_1, i_2, j_2 \in \mathbb{J}_2, t \in \mathrm{G}.$$

Il membro a destra dell'uguaglianza è una forma lineare rispetto a $x_{j_2 j_1}$: nel caso (1) questa forma risulta essere nulla per qualunque insieme di valori di $x_{j_2 j_1}$. Questo implica che i suoi coefficienti devono essere tutti uguali a zero, da cui la tesi. □

Corollario 2.2.4. *Con riferimento al* Corollario 2.2.2 *e alla scrittura in forma matriciale precedente, nel caso* (2) *si ha:*

$$\frac{1}{g}\sum_{t\in \mathrm{G}} r_{i_2 j_2}\left(t^{-1}\right) r_{j_1 i_1}(t) = \frac{1}{n}\delta_{i_2 i_1}\delta_{j_2 j_1} = \begin{cases} 1/n & \textit{se } i_1 = i_2 \textit{ e } j_1 = j_2, \\ 0 & \textit{altrimenti}, \end{cases}$$

per una scelta arbitraria di $i_1, j_1 \in \mathbb{J}_1$, $i_2, j_2 \in \mathbb{J}_2 = \mathbb{J}_1$.

Dimostrazione. Si ha infatti $h^0 = \Lambda$, ossia $x^0_{i_2 i_1} = \lambda\delta_{i_2 i_1}$, $i_2, i_1 \in \mathbb{J}_1$, con $\lambda = (1/n)\operatorname{Tr}(h)$; esplicitando $\operatorname{Tr}(h)$ si ottiene $\lambda = (1/n)\sum_{j_2, j_1 \in \mathbb{J}_1} \delta_{j_2 j_1} x_{j_2 j_1}$. Da ciò segue:

$$\frac{1}{g}\sum_{t, j_1, j_2} r_{i_2 j_2}\left(t^{-1}\right) x_{j_2 j_1} r_{j_1 i_1}(t) = \frac{1}{n}\sum_{j_1, j_2} \delta_{i_2 i_1}\delta_{j_2 j_1} x_{j_2 j_1} \qquad \text{per } i_1, j_1, i_2, j_2 \in \mathbb{J}_1, t \in \mathrm{G}.$$

Il che implica la tesi. □

Anticipiamo ora la definizione un certo operatore che sarà maggiormente utilizzato nella prossima sezione.

Definizione. *Sia* G *un gruppo di ordine* g *e sia* $\mathbb{C}^{\mathrm{G}} = \{f \mid f : \mathrm{G} \to \mathbb{C}\}$. *Definiamo l'operatore*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^{\mathrm{G}} \times \mathbb{C}^{\mathrm{G}} \to \mathbb{C}$$

come segue

$$\langle \phi, \psi \rangle = \frac{1}{g}\sum_{t\in \mathrm{G}} \phi(t^{-1})\psi(t) = \frac{1}{g}\sum_{t\in \mathrm{G}} \phi(t)\psi(t^{-1}), \qquad \phi, \psi \in \mathbb{C}^{\mathrm{G}}.$$

Si ha che $\langle \phi, \psi \rangle = \langle \psi, \phi \rangle$, per ogni $\phi, \psi \in \mathbb{C}^{\mathrm{G}}$. Tale operatore è inoltre lineare in entrambe le componenti. Risulta evidente una possibile riscrittura del Corollario 2.2.2 e del Corollario 2.2.3 tramite questo operatore: mantenendo le stesse notazioni, per ogni $i_1, j_1 \in \mathbb{J}_1$, $i_2, j_2 \in \mathbb{J}_2$, si ha

(1) $\langle r_{i_2 j_2}, r_{j_1 i_1} \rangle = 0$,

(2) $\langle r_{i_2 j_2}, r_{j_1 i_1} \rangle = \frac{1}{n}\delta_{i_2 i_1}\delta_{j_2 j_1}$.

2.3 Relazioni di ortogonalità dei caratteri

Introduciamo ora un nuovo operatore, grazie al quale potremo presentare alcune relazioni di ortogonalità dei caratteri.

Definizione. *Sia* G *un gruppo di ordine* g *e sia* $\mathbb{C}^{\mathrm{G}} = \{f \mid f : \mathrm{G} \to \mathbb{C}\}$. *Definiamo l'operatore*

$$(\cdot \mid \cdot) : \mathbb{C}^{\mathrm{G}} \times \mathbb{C}^{\mathrm{G}} \to \mathbb{C}$$

come segue

$$(\phi \mid \psi) = \frac{1}{g}\sum_{t\in \mathrm{G}} \phi(t)\psi(t)^*, \qquad \phi, \psi \in \mathbb{C}^{\mathrm{G}}.$$

Risulta evidente che l'operatore così definito è un prodotto scalare. Si nota inoltre la somiglianza con l'operatore $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Per ogni $\psi \in \mathbb{C}^{\mathrm{G}}$, sia $\check{\psi} \in \mathbb{C}^{\mathrm{G}}$ tale che $\check{\psi}(t) = \psi(t^{-1})^*$ per ogni $t \in \mathrm{G}$. Per ogni $\psi, \phi \in \mathbb{C}^{\mathrm{G}}$, risulta

$$(\phi \mid \psi) = \langle \phi, \check{\psi} \rangle.$$

Notiamo che, se χ è il carattere di una rappresentazione di un gruppo G, dalla Proposizione 2.1.1 segue che $\chi = \check{\chi}$, da cui $(\phi \mid \chi) = \langle \phi, \chi \rangle$, per ogni $\phi \in \mathbb{C}^{\mathrm{G}}$.

Prima di enunciare il primo risultato di ortogonalità riguardante il prodotto scalare introdotto, diamo una definizione.

Definizione. *Sia χ il carattere di una rappresentazione irriducibile. χ è detto carattere irriducibile.*

Il seguente risultato riguarda appunto l'operatore $(\cdot \mid \cdot)$ e i caratteri irriducibili in quello che potrebbe essere visto come un criterio di ortogonalià.

Teorema 2.3.1.

(i) *Se χ è un carattere irriducibile, si ha che* $(\chi \mid \chi) = 1$ (ossia χ è di norma 1).

(ii) *Se χ e χ' sono i caratteri irriducibili di due rappresentazioni non isomorfe, si ha che* $(\chi \mid \chi') = 0$ (ossia χ e χ' sono ortogonali).

Dimostrazione.

(i) Sia ρ una rappresentazione irriducibile di grado n data in forma matriciale $\rho_t = (r_{ij}(t))_{i,j \in \mathbb{J}}$, $\mathbb{J} = \{1, 2, ..., n\}$, e sia χ il carattere di ρ. Si ha che $\chi(t) = \sum_{i \in \mathbb{J}} r_{ii}(t)$, da cui

$$(\chi \mid \chi) = \langle \chi, \chi \rangle = \sum_{i,j \in \mathbb{J}} \langle r_{ii}, r_{jj} \rangle.$$

Per il Corollario 2.2.4, $\langle r_{ii}, r_{jj} \rangle = \delta_{ij}/n$, $i, j \in \mathbb{J}$. Da ciò segue che

$$(\chi \mid \chi) = \frac{1}{n} \sum_{i,j \in \mathbb{J}} \delta_{ij} = n/n = 1.$$

(ii) Si procede allo stesso modo, applicando però il Corollario 2.2.3. Sia ρ' una rappresentazione irriducibile di grado n' data in forma matriciale $\rho'_t = \left(r'_{ij}(t)\right)_{i,j \in \mathbb{J}'}$, $\mathbb{J}' = \{1, 2, ..., n'\}$, e sia χ' il carattere di ρ'.

$$\left(\chi \mid \chi'\right) = \left\langle \chi, \chi' \right\rangle = \sum_{i \in \mathbb{J}, j \in \mathbb{J}'} \left\langle r_{ii}, r'_{jj} \right\rangle = 0.$$

□

Grazie al Teorema 2.3.1, abbiamo un criterio di isomorfismo tra rappresentazioni irriducibili basato sul prodotto scalare $(\cdot \mid \cdot)$. Vediamo come questo si possa estendere a rappresentazioni non irriducibili: sfruttando il Teorema 1.3.1, l'idea è quella di applicare questo criterio alle singole componenti di una decomposizione in rappressentazioni irriducibili di una data rappresentazione. Enunciamo dunque un teorema e due suoi corollari.

Teorema 2.3.2. *Siano* G *un gruppo e* V *una rappresentazione lineare, sia ϕ il suo carattere, e si supponga di decomporre* V *come somma diretta di rappresentazioni irriducibili:*

$$\mathrm{V} = \mathrm{W}_1 \oplus \mathrm{W}_2 \oplus \cdots \oplus \mathrm{W}_k$$

Allora, se W *è una rappresentazione irriducibile e χ è il suo carattere, il numero di W_i isomorfi a* W *è uguale al prodotto scalare $(\phi \mid \chi) = \langle \phi, \chi \rangle$.*

Dimostrazione. Sia χ_i il carattere di W_i, $i = 1, 2, ..., k$. Per la Proposizione 2.1.2, si ha che

$$\phi = \chi_1 + \chi_2 + \cdots + \chi_k.$$

Si ha cioè $(\phi \mid \chi) = (\chi_1 \mid \chi) + (\chi_2 \mid \chi) + \cdots + (\chi_k \mid \chi)$. Per il Teorema 2.3.1

$$(\chi_i \mid \chi) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathrm{W}_i \text{ è isomorfo a } \mathrm{W}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Da ciò segue la tesi. □

Corollario 2.3.3. *Il numero di* W_i *isomorfi a* W *non dipende dalla particolare decomposizione scelta* (Tale numero viene detto "numero di volte in cui W è contenuto in V", o "numero di volte in cui W è presente in V")*.*

Dimostrazione. Tale numero dipende infatti solo da $(\phi \mid \chi)$, il quale non dipende dalla decomposizione scelta. □

Corollario 2.3.4. *Due rappresentazioni sono isomorfe se e solo se hanno lo stesso carattere.*

Dimostrazione. Infatti, dal Corollario 2.3.3 si deduce che due rappresentazioni con lo stesso carattere contengono, ciascuna, una data rappresentazione irriducibile lo stesso numero di volte. Inoltre, due rappresentazioni isomorfe hanno lo stesso carattere perché la traccia è invariante per similitudine. □

Sia dunque G un gruppo. Lo studio delle sue rappresentazioni si riduce quindi allo studio dei suoi caratteri. In particolare, siano $\chi_1, \chi_2, ..., \chi_h$ i caratteri irriducibili distinti di G, e siano $\mathrm{W}_1, \mathrm{W}_2, ..., \mathrm{W}_h$ le corrispondenti rappresentazioni irriducibili. Possiamo scrivere ciò in quanto h è un numero finito: i caratteri irriducibili non isomorfi sono ortogonali tra loro nello spazio $\mathbb{C}^{\mathrm{G}}$, quindi in particolare linearmente indipendenti, in uno spazio vettoriale di dimensione finita. Ogni rappresentazione V è dunque isomorfa a una somma diretta di questo tipo

$$\mathrm{V} = m_1\mathrm{W}_1 \oplus m_2\mathrm{W}_2 \oplus \cdots m_h\mathrm{W}_h,$$

con $m_1, m_2, ..., m_h \in \mathbb{N}$. Sappiamo che per il carattere ϕ di V, vale $\phi = m_1\chi_1 + m_2\chi_2 + \cdots + m_h\chi_h$. Siccome i χ_i sono distinti e le W_i sono tutte irriducibili, per $i = 1, 2, ..., h$, segue dal Teorema 2.3.2 che $m_i = (\phi \mid \chi_i)$, per $i = 1, 2, ..., h$. Per le relazioni di ortogonalità viste, vale inoltre

$$(\phi \mid \phi) = \sum_{i=1}^{i=h} m_i^2.$$

Da ciò segue un importante criterio di irriducibilità.

Teorema 2.3.5. *Se* ϕ *è il carattere di una rappresentazione* V*,* $(\phi \mid \phi)$ *è un intero positivo e si ha che* $(\phi \mid \phi) = 1$ *se e solo se* V *è irriducibile.*

Dimostrazione. Mantenendo le notazioni precedenti, $\sum_{i=1}^{i=h} m_i^2$ è infatti uguale ad 1 se e solo se esiste un unico $k \in \{1, 2, ..., h\}$ tale che $m_k = 1$ e $m_j = 0$ per ogni $j \in \{1, 2, ..., h\} \setminus \{k\}$. Se così fosse, V sarebbe isomorfo a W_k, ossia ad una rappresentazione irriducibile. □

2.4 Decomposizione della rappresentazione regolare

Sia G un gruppo di ordine g. Se non specificatamente indicato, indicheremo con $\chi_1, \chi_2, ..., \chi_h$ i suoi caratteri irriducibili associati alle rappresentazioni $\mathrm{W}_1, \mathrm{W}_2, ..., \mathrm{W}_h$ e con $n_1, n_2, ..., n_h$ i loro gradi, ricordando che $n_i = \chi_i(1)$, $i = 1, 2, ..., h$.

Andiamo ora ad analizzare la rappresentazione regolare dal punto di vista della teoria dei caratteri.

Proposizione 2.4.1. *Il carattere* r_{G} *della rappresentazione regolare è dato dalle seguenti formule:*

$$\begin{aligned} r_{\mathrm{G}}(1) &= g, && \textit{con } g \textit{ ordine di } \mathrm{G}. \\ r_{\mathrm{G}}(s) &= 0 && \text{se } s \neq 1. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Sia R la rappresentazione regolare di G in uno spazio vettoriale V. Esiste allora una base $(e_t)_{t\in \mathrm{G}}$ di V tale che $\rho_s e_t = e_{st}$.
Se $s \neq 1$, allora $st \neq t$ per ogni $t \in \mathrm{G}$, il che significa che i termini sulla diagonale della matrice che rappresenta ρ_s sono tutti nulli: se così non fosse infatti, esisterebbe k tale che $(\rho_s)_{kk} \neq 0$, ma $\rho_s e_k = e_k \neq e_{sk}$. In particolare $r_{\mathrm{G}}(s) = \mathrm{Tr}(\rho_s) = 0$.
Se $s = 1$ si ha invece

$$\mathrm{Tr}\,(\rho_s) = \mathrm{Tr}\,(\mathbb{I}) = \dim\,(\mathrm{R}) = g.$$

□

Un primo corollario riguarda il numero di volte in cui una data rappresentazione irriducibile è contenuta nella rappresentazione regolare.

Corollario 2.4.2. *Ogni rappresentazione irriducibile* W_i *è contenuta nella rappresentazione regolare con molteplicità uguale al suo grado* n_i*.*

Dimostrazione. Dal Teorema 2.3.2 deduciamo che W_i è contenuta nella rappresentazione regolare con molteplicità $\langle r_{\mathrm{G}}, \chi_i\rangle$, e si ha che

$$\langle r_{\mathrm{G}}, \chi_i\rangle = \frac{1}{g}\sum_{s\in \mathrm{G}} r_{\mathrm{G}}\left(s^{-1}\right)\chi_i\left(s\right) = \frac{1}{g} g\cdot \chi_i\left(1\right) = \chi_i\left(1\right) = n_i.$$

□

Un secondo corollario tratta altre proprietà dei gradi n_i.

Corollario 2.4.3.

(i) *I gradi* n_i *soddisfano la relazione* $\sum_{i=1}^{i=h} n_i^2 = g$*.*

(ii) *Se* $s \in \mathrm{G}$*,* $s \neq 1$*, si ha* $\sum_{i=1}^{i=h} n_i\chi_i(s) = 0$*.*

Dimostrazione. Per il Corollario 2.4.2, $r_{\mathrm{G}}(s) = \sum_{i=1}^{i=h} n_i\chi_i(s)$ per ogni $s \in \mathrm{G}$.

(i) Sia $s = 1$. Per la Proposizione 2.4.1 vale $r_{\mathrm{G}}(1) = g$; inoltre

$$r_{\mathrm{G}}(1) = \sum_{i=1}^{i=h} n_i\chi_i(1) = \sum_{i=1}^{i=h} n_i n_i = \sum_{i=1}^{i=h} n_i^2,$$

da cui segue $\sum_{i=1}^{i=h} n_i^2 = g$.

(ii) Sia $s \neq 1$. Per la Proposizione 2.4.1 vale $r_{\mathrm{G}}(s) = 0$; inoltre $r_{\mathrm{G}}(s) = \sum_{i=1}^{i=h} n_i\chi_i(s)$, da cui segue $\sum_{i=1}^{i=h} n_i\chi_i(s) = 0$.

□

Osservazione: supponiamo di aver costruito alcune rappresentazioni irriducibili mutuamente non isomorfe tra loro di gradi $n_1, n_2, ..., n_k$. Dal Corollario 2.4.3, segue che, affinché esse siano tutte e sole le rappresentazioni irriducibili di G (a meno di isomorfismi), è necessario e sufficiente che $n_1^2 + n_2^2 + \cdots + n_k^2 = g$.

2.5 Numero di rappresentazioni irriducibili

Partiamo con un risultato sulle funzioni di classe, che sono state definite nella Sezione 2.1. La seguente proposizone ci permetterà poi di enunciare due teoremi che mettono in relazione il numero di rappresentazioni irriducibili di un dato gruppo G con il numero delle sue classi di coniugio.

Proposizione 2.5.1. *Siano* G *un gruppo di ordine* g, $\rho : \mathrm{G} \to \mathbf{GL}(\mathrm{V})$ *una rappresentazione lineare di* G *e* $f : \mathrm{G} \to \mathbb{C}$ *una funzione di classe su* G. *Sia* $\rho_f : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ *la mappa lineare definita da:*

$$\rho_f = \sum_{t \in \mathrm{G}} f(t)\rho_t.$$

Se V *è una rappresentazione irriducibile di grado* n *e carattere* χ, *allora* ρ_f *è un'omotetia* Λ *di rapporto* λ *dato da:*

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{t \in \mathrm{G}} f(t)\chi(t) = \frac{g}{n} \left(f \mid \chi^* \right).$$

Dimostrazione. L'obiettivo è utilizzare il lemma di Schur (Proposizione 2.2.1). Si calcola dunque per prima cosa $\rho_s^{-1}\rho_f\rho_s$ per un generico $s \in \mathrm{G}$. Per linearità di ρ_s, risulta:

$$\rho_s^{-1}\rho_f\rho_s = \sum_{t \in \mathrm{G}} f(t)\rho_s^{-1}\rho_t\rho_s = \sum_{t \in \mathrm{G}} f(t)\rho_{s^{-1}ts}.$$

Ricordando che f è una funzione di classe e ponendo $u = s^{-1}ts$ si ottiene:

$$\rho_s^{-1}\rho_f\rho_s = \sum_{u \in \mathrm{G}} f(sus^{-1})\rho_u = \sum_{u \in \mathrm{G}} f(u)\rho_u = \rho_f.$$

Risulta quindi $\rho_f\rho_s = \rho_s\rho_f$, e questo per ogni $s \in \mathrm{G}$. Per il punto (2) del lemma di Schur (Proposizione 2.2.1), si ha che $\rho_f = \Lambda$ omotetia di rapporto λ. $\mathrm{Tr}(\Lambda) = n\lambda$; siccome $\rho_f = \Lambda$, $\mathrm{Tr}(\rho_f) = \mathrm{Tr}(\Lambda) = n\lambda$, da cui:

$$\lambda = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(\rho_f) = \frac{1}{n} \sum_{t \in \mathrm{G}} f(t)\mathrm{Tr}(\rho_t) = \frac{1}{n} \sum_{t \in \mathrm{G}} f(t)\chi(t) = \frac{g}{n} \left(f \mid \chi^* \right).$$

□

Vediamo ora come mettere in relazione il numero di caratteri irriducibili con quello delle classi di coniugio di G. Partiamo da una definizione.

Definizione. *Sia* G *un gruppo. Definiamo* $\mathrm{H} := \{f \mid f : \mathrm{G} \to \mathbb{C}$ *funzione di classe su* $\mathrm{G}\}$.

Si verifica facilmente che H è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}^{\mathrm{G}}$.

Teorema 2.5.2. *Sia* G *un gruppo. Sia* $\mathrm{H} = \{f \mid f : \mathrm{G} \to \mathbb{C}$ *funzione di classe su* $\mathrm{G}\}$ *lo spazio vettoriale delle funzioni di classe su* G. *I caratteri irriducibili* $\chi_1, \chi_2, ..., \chi_h$ *formano una base ortonormale di* H.

Dimostrazione. Il Teorema 2.3.1 mostra come i χ_i formino un sistema ortonormale in H (i χ_i appartengono infatti ad H per il punto (iii) della Proposizione 2.1.1). Rimane da dimostrare che generano H, e per fare ciò è sufficiente dimostrare che se un elemento è ortogonale ad ogni χ_i^*, allora tale elemento è la funzione nulla.
Sia dunque $f \in \mathrm{H}$ ortogonale ad ogni χ_i^*. Per ogni rappresentazione ρ di G, sia $\rho_f = \sum_{t \in \mathrm{G}} f(t)\rho_t$. Siccome f è ortogonale a tutti i χ_i^*, la Proposizione 2.5.1 ci assicura che ρ_f sia la funzione nulla (un'omotetia di rapporto 0) purché ρ sia irriducibie; dalla decomposizione in somma diretta di rappresentazioni irriducibili possiamo concludere che ρ_f è costantemente nulla (infatti, su ogni componente

irriducibile della decomposizione, ρ_f è costantemente nulla, quindi lo è dappertutto). Applicando ciò alla rappresentazione regolare R e calcolando l'immagine di e_1 attraverso R_f si ottiene:

$$\mathrm{R}_f e_1 = \sum_{t\in\mathrm{G}} f(t)\mathrm{R}_t e_1 = \sum_{t\in\mathrm{G}} f(t)e_t.$$

Siccome R_f è costantemente uguale a 0, segue che $\mathrm{R}_f e_1 = 0$, si ha cioè $\sum_{t\in\mathrm{G}} f(t)e_t = 0$, per l'indipendenza degli e_i risulta $f(t) = 0$ per ogni $t \in \mathrm{G}$. □

Dal Teorema 2.5.2 segue il risultato che dà il titolo a questa sezione.

Teorema 2.5.3. *Il numero di rappresentazioni irriducibili di* G *(a meno di isomorfismo) è uguale al numero di classi di coniugio di* G.

Dimostrazione. Siano $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, ..., \mathrm{C}_k$ le classi di coniugio distinte di G. Dire che una funzione $f : \mathrm{G} \to \mathbb{C}$ è di classe è equivalente a dire che tale f è costante su ogni C_i, $i = 1, 2, ..., k$. Tale funzione f è dunque in corrispondenza biunivoca con la $k-$upla di valori $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k) \in \mathbb{C}^k$ che essa assume su $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, ..., \mathrm{C}_k$. Sia $\mathrm{H} = \{f \mid f : \mathrm{G} \to \mathbb{C}$ funzione di classe su G$\}$; risulta quindi $\dim(\mathrm{H}) = k$. Per il Teorema 2.5.2, la dimensione di H è uguale al numero di rappresentazioni irriducibili di G (a meno di isomorfismo), il quale risulta essere dunque uguale al numero di classi di coniugio di G. □

Enunciamo inoltre un altro importante risultato che segue dal Teorema 2.5.2.

Proposizione 2.5.4. *Sia* G *un gruppo di ordine* g. *Sia* $s \in \mathrm{G}$, *e sia* $c(s)$ *il numero di elementi nella classe di coniugio* $\mathrm{C}(s)$ *di* s.

(i) *Risulta* $\sum_{i=1}^{i=h} \chi_i(s)^*\chi_i(s) = g/c(s)$.

(ii) *Per* $t \in \mathrm{G}$, $t \notin \mathrm{C}(s)$, *risulta* $\sum_{i=1}^{i=h} \chi_i(s)^*\chi_i(t) = 0$.

Dimostrazione. Sia $f_s : \mathrm{G} \to \mathbb{C}$ la funzione di classe su G definita come segue:

$$f_s(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in \mathrm{C}(s), \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

f_s è effettivamente una funzione di classe: per il Teorema 2.5.2 può quindi essere scritta come

$$f_s = \sum_{i=1}^{i=h} \lambda_i \chi_i, \qquad \lambda_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, ..., h,$$

applicando il prodotto scalare con un generico χ_j ad ambo i membri e ricordando il Teorema 2.3.1, si ottiene:

$$\lambda_j = (f_s \mid \chi_j) = \frac{1}{g}\sum_{t\in\mathrm{G}} f_s(t)\chi_j(t)^* = \frac{c(s)}{g}\chi_j(s)^*,$$

ricordando inoltre l'espressione di f_s ed il fatto che χ_j sia funzione di classe. Risulta allora:

$$f_s(t) = \frac{c(s)}{g}\sum_{i=1}^{i=h} \chi_i(s)^*\chi_i(t).$$

(i) Per $t = s$, $f_s(t) = f_s(s) = 1$, e si ottiene perciò

$$1 = \frac{c(s)}{g}\sum_{i=1}^{i=h} \chi_i(s)^*\chi_i(s), \qquad \text{da cui } \sum_{i=1}^{i=h} \chi_i(s)^*\chi_i(s) = \frac{g}{c(s)}.$$

(ii) Per $t \notin \mathrm{C}(s)$, $f_s(t) = 0$, e si ottiene perciò

$$0 = \frac{c(s)}{g} \sum_{i=1}^{i=h} \chi_i(s)^* \chi_i(t), \qquad \text{da cui } \sum_{i=1}^{i=h} \chi_i(s)^* \chi_i(t) = 0.$$

□

Osservazione: la Proposizione 2.5.4 estende il Corollario 2.4.3. Tale corollario è infatti implicato dalla Proposizione 2.5.4 nel caso $s = 1$.

Esempio ($\mathfrak{S}_3$).
Sia $\mathfrak{S}_3$ il gruppo delle permutazioni di tre elementi, a, b, c. Indicheremo gli elementi di $\mathfrak{S}_3$ in maniera usuale come $1, (ab), (ac), (bc), (abc), (acb)$. Indicheremo con x una trasposizione generica e con y una permutazione ciclica generica. Per prima cosa vediamo le classi di coniugio:

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}(1) &= \{1\}\,, \\
\mathrm{C}(x) &= \{(ab), (ac), (bc)\}\,, \\
\mathrm{C}(y) &= \{(abc), (acb)\}\,.
\end{aligned}$$

Abbiamo quindi la classe di coniugio dell'elemento neutro, quella delle trasposizioni e quella delle permutazioni cicliche. Siamo interessati a trovare tutti i caratteri delle rappresentazioni irriducibili, che sappiamo essere tre, grazie al Teorema 2.5.3.
Siccome χ è una funzione di classe, ci basterà trovare $\chi(x)$ e $\chi(y)$ per caratterizzare la rappresentazione. Partiamo da quelle di grado 1.
Sia $\rho : \mathfrak{S}_3 \to \mathbf{GL}(\mathbb{C})$ una rappresentazione di grado 1 e sia χ il suo carattere. In forma matriciale abbiamo che $\rho_s = \chi(s)$, poiché ρ_s è una matrice di grado 1, per ogni $s \in \mathfrak{S}_3$.
Data una permutazione ciclica y, si ha che $y^3 = 1$ e che y è coniugato a y^2. Abbiamo dunque che $\rho(y^3) = \rho(1) = \mathbb{I} = 1$ e che $\rho(y^3) = \rho(y)^3$, questo significa che $\rho(y)$ è una radice terza dell'unità, perciò anche $\chi(y)$ lo è. Siccome y è coniugato a y^2, e χ è una funzione di classe, $\chi(y) = \chi(y^2)$, ma $y^2 = y^{-1}$: per le propretà del carattere, $\chi(y) = \chi(y^2) = \chi(y^{-1}) = \chi(y)^*$. $\chi(y)$ è dunque una radice terza dell'unità ed è un numero reale: $\chi(y) = 1$.
Data ora una trasposizione x, si ha che $x^2 = 1$. Abbiamo dunque che $\rho(x^2) = \rho(1) = \mathbb{I} = 1$ e che $\rho(x^2) = \rho(x)^2$, questo significa che $\rho(x)$ è una radice quadrata dell'unità, perciò anche $\chi(x)$ lo è. Possiamo dunque distinguere due casi.

(i) $\chi_1 : \{1, x, y\} \to \mathbb{C}$ tale che $\chi_1(1) = 1$, $\chi_1(x) = 1$, $\chi_1(y) = 1$, χ_1 carattere irriducibile della rappresentazione banale,

(ii) $\chi_2 : \{1, x, y\} \to \mathbb{C}$ tale che $\chi_2(1) = 1$, $\chi_2(x) = -1$, $\chi_2(y) = 1$, χ_2 carattere irriducibile della rappresentazione mediante segno della permutazione.

Siccome abbiamo trovato due rappresentazioni di grado 1, per il Teorema 2.5.3 e per il punto (i) del Corollario 2.4.3, esiste esattamente un'altra rappresentazione irriducibile, necessariamente di grado $n \geq 2$. Deve valere

$$1^2 + 1^2 + n^2 = 6.$$

L'identità è verificata per $n = 2$. Esiste dunque un'altra rappresentazione irriducibile di carattere χ_3 e di grado 2. Per il Corollario 2.4.2 e per la Proposizione 2.4.1, possiamo determinare i valori che assume il carattere χ_3. Vale infatti $r_{\mathrm{G}} = \chi_1 + \chi_2 + 2\chi_3$ che valutato sulle componenti si traduce in $0 = 1 - 1 + 2\chi_3(x)$ e $0 = 1 + 1 + 2\chi_3(y)$, inoltre per il punto (i) della Proposizione 2.1.1, $\chi_3(1) = 2$. Riassumendo

(iii) $\chi_3 : \{1, x, y\} \to \mathbb{C}$ tale che $\chi_3(1) = 2$, $\chi_3(x) = 0$, $\chi_3(y) = -1$.

Solitamente, si raggruppano i valori dei caratteri irriducibili in una tabella, detta tabella dei caratteri di G.

	1	x	y
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

2.6 Decomposizione canonica di una rappresentazione

Come osservato a seguito del Teorema 1.3.1, data una rappresentazione V, non esiste un'unica decomposizione in rappresentazioni irriducibili. L'obiettivo di questa sezione è quello di trovare una decomposizione unica di una data rappresenntazione V, che prenderà appunto il nome di decomposizione canonica.

Siano G un gruppo, V uno spazio vettriale e $\rho : \mathrm{G} \to \mathbf{GL}(\mathrm{V})$ una rappresentazione di G in V. Siano $\chi_1, \chi_2, ..., \chi_h$ i caratteri delle rappresentazioni irriducibili $\mathrm{W}_1, \mathrm{W}_2, ..., \mathrm{W}_h$ di G e siano $n_1, n_2, ..., n_h$ i loro gradi. Sia ora $\mathrm{V} = \bigoplus_{k \in \mathbb{J}} \mathrm{U}_k$ una decomposizione di V come somma diretta di rappresentazioni irriducibili, con $\mathbb{J}$ insieme finito di indici. Costruiamo una nuova decomposizione. Si definisca

$$\mathrm{V}_i = \bigoplus_{j \in \mathbb{J}_i} \mathrm{U}_j, \qquad \mathbb{J}_i \subseteq \mathbb{J}$$

tale che gli $\mathrm{U}_j, j \in \mathbb{J}_i$, siano tutti e soli gli $\mathrm{U}_k, k \in \mathbb{J}$, isomorfi a W_i, questo per ogni $i \in \mathbb{J}$. In altre parole, V_i è somma diretta di tutti e soli gli U_k isomorfi a W_i. Risulta

$$\mathrm{V} = \mathrm{V}_1 \oplus \mathrm{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathrm{V}_h.$$

Abbiamo scritto V come somma diretta di rappresentazioni irriducibili e abbiamo poi messo insieme le rappresentazioni isomorfe. Possiamo dunque dare la seguente definizione.

Definizione. *Con le notazioni precedenti, la decomposizione* $\mathrm{V} = \mathrm{V}_1 \oplus \mathrm{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathrm{V}_h$ *è detta decomposizione canonica di V.*

La definizione acquisterà senso grazie al punto (i) del seguente teorema.

Teorema 2.6.1.

(i) *La decomposizione canonica* $\mathrm{V} = \mathrm{V}_1 \oplus \mathrm{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathrm{V}_h$ *non dipende dalla scelta della decomposizione iniziale di* V *in rappresentazioni irriducibili.*

(ii) *Per ogni* $i = 1, 2, ..., h$, *la proiezione* p_i *di* V *su* V_i *associata a tale decomposizione è data dalla formula*

$$p_i = \frac{n_i}{g} \sum_{t \in \mathrm{G}} \chi_i(t)^* \rho_t, \qquad \textit{con } g \textit{ ordine di } \mathrm{G}.$$

Dimostrazione. Iniziamo col notare che (ii) implica (i): per ogni i infatti, V_i è determinato da p_i, che è indipendente dalla decomposizione iniziale. Dimostriamo dunque (ii). Sia:

$$q_i = \frac{n_i}{g} \sum_{t \in \mathrm{G}} \chi_i(t)^* \rho_t.$$

Per la Proposizione 2.5.1, la restrizione di q_i a una rappresentazione irriducibile W di carattere χ e grado n è un'omotetia Λ di rapporto $\lambda = (n_i/n)(\chi_i^* \mid \chi^*) = (n_i/n)(\chi_i \mid \chi)$; in particolare $\lambda = 0$ se

$\chi \neq \chi_i$ e $\lambda = 1$ se $\chi = \chi_i$. In altre parole, q_i è l'identità su una rappresentazione irriducibile isomorfa a W_i e identicamente nulla sulle altre. Per come sono stati definiti i V_i, q_i è l'identità su V_i ed è uguale a zero su V_j, per ogni $j \neq i$. Se, preso un elemento $x \in \mathrm{V}$, si indicano con $x_i \in \mathrm{V}_i$ le sue componenti:

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_h,$$

si ha che, per linearità, $q_i(x) = q_i(x_1) + q_i(x_2) + \cdots + q_i(x_h) = x_i$. Questo prova che q_i è la proiezione p_i di V su V_i. $\square$

Possiamo quindi decomporre una rappresentazione di V in due passi. Per prima cosa, si determina la decomposizione canonica $\mathrm{V} = \mathrm{V}_1 \oplus \mathrm{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathrm{V}_h$ grazie alle proiezioni definite nel Teorema 2.6.1. Successivamente, se necessario, ogni V_i può essere scritto come somma diretta di rappresentazioni irriducibili tutte isomorfe a W_i: $\mathrm{V}_i = \mathrm{W}_i \oplus \mathrm{W}_i \oplus \cdots \oplus \mathrm{W}_i$. Come già osservato, questo secondo passo può essere eseguito in modi diversi.

Esempio (gruppo ciclico C_2).
Sia $\mathrm{G} = \mathrm{C}_2 = \{1, s\}$ il gruppo ciclico con due elementi. Siano inoltre V uno spazio vettoriale e $\rho : \mathrm{C}_2 \to \mathbf{GL}(\mathrm{V})$ una rappresentazione di G in V. Per il punto (i) del Corollario 2.4.3, tale gruppo ha solo due rappresentazioni irriducibili di grado 1, che indicheremo con W^+ e W^-, corrispondenti alle rappresentazioni $\rho^+ : \mathrm{C}_2 \to \mathbf{GL}(\mathbb{C})$ tale che $\rho^+_1 = 1, \rho^+_s = 1$ e $\rho^- : \mathrm{C}_2 \to \mathbf{GL}(\mathbb{C})$ tale che $\rho^-_1 = 1, \rho^-_s = -1$ rispettivamente, questo perché s ha ordine due (è stato fatto lo stesso discorso per $\mathfrak{S}_3$). La decomposizione canonica della rappresentazione V è del tipo $\mathrm{V} = \mathrm{V}^+ \oplus \mathrm{V}^-$, dove V^+ è costituito dagli elementi $x \in \mathrm{V}$ simmetrici, ossia tali che $\rho_s x = x$, e V^- è costituito dagli elementi $x \in \mathrm{V}$ antisimmetrici, ossia tali che $\rho_s x = -x$. Le corrsipondenti proiezioni sono date da

$$p^+x = \frac{1}{2}(x + \rho_s x), \qquad p^-x = \frac{1}{2}(x - \rho_s x).$$

2.7 Costruzione esplicita di una decomposizione

Siano G un gruppo, V uno spazio vettoriale e $\rho : \mathrm{G} \to \mathbf{GL}(\mathrm{V})$ una rappresentazione di G in V. Sia inoltre, con le notazioni della sezione precedente, $\mathrm{V} = \mathrm{V}_1 \oplus \mathrm{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathrm{V}_h$ la decomposizione canonica di V. Grazie alle proiezioni definite nel Teorema 2.6.1, siamo in grado di determinare ogni componene V_i, $i \in \mathbb{J} = \{1, 2, ..., h\}$. Diamo adesso un metodo esplicito per costruire una decomposizione di V_i come somma diretta di sottorappresentazioni isomorfe a W_i, $i = 1, 2, ..., h$. Sia dunque data W_i in forma matriciale $(r_{\alpha\beta}(s))_{\alpha,\beta \in \mathbb{J}_i}$ rispetto a una base $(e_k)_{k \in \mathbb{J}_i}$, per ogni $s \in \mathrm{G}$. Si ha che $\chi_i(s) = \sum_{\alpha \in \mathbb{J}_i} r_{\alpha\alpha}(s)$ e che $\mathbb{J}_i = \{1, 2, ..., n\}$, con $n = n_i = \dim(\mathrm{W}_i)$. Per ogni $(\alpha, \beta) \in \{1, 2, ..., n\} \times \{1, 2, ..., n\}$, sia $p_{\alpha\beta}$ la mappa lineare da V in V definita da

$$p_{\alpha\beta} = \frac{n}{g} \sum_{t \in \mathrm{G}} r_{\beta\alpha}(t^{-1}) \rho_t. \tag{$*$}$$

Fatta questa premessa, possiamo dunque enunciare la seguente proposizione.

Proposizione 2.7.1.

(i) *La mappa $p_{\alpha\alpha}$ è una proiezione; è zero su V_j, $j \in \mathbb{J}, j \neq i$. La sua immagine $\mathrm{V}_{i,\alpha}$ è contenuta in V_i, e V_i è somma diretta di $\mathrm{V}_{i,\alpha}$ per $\alpha \in \mathbb{J}_i$. Si ha $p_i = \sum_{\alpha \in \mathbb{J}_i} p_{\alpha\alpha}$.*

(ii) *La mappa lineare $p_{\alpha\beta}$ è zero su V_j, $j \in \mathbb{J}, j \neq i$, così come su $\mathrm{V}_{i,\gamma}$ per $\gamma \in \mathbb{J}_i, \gamma \neq \beta$; definisce un isomorfismo da $\mathrm{V}_{i,\beta}$ a $\mathrm{V}_{i,\alpha}$.*

(iii) *Sia $x_1 \neq 0$ un elemento di $\mathrm{V}_{i,1}$ e sia $x_\alpha = p_{\alpha 1}(x_1) \in \mathrm{V}_{i,\alpha}$. Gli x_α sono linearmente indipendenti e generano, al variare di $\alpha \in \mathbb{J}_i$, un sottospazio vettoriale $\mathrm{W}(x_1)$ stabile sotto l'azione di G e di* *dimensione n. Per ogni $s \in \mathrm{G}$, si ha*

$$\rho_s(x_\alpha) = \sum_{\beta \in \mathbb{J}_i} r_{\beta\alpha}(s) x_\beta$$

(in particolare, $\mathrm{W}(x_1)$ è isomorfo a W_i).

(iv) *Se $(x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, ..., x_1^{(m)})$ è una base di $\mathrm{V}_{i,1}$, la rappresentazione V_i è la somma diretta delle sottorappresentazioni $\mathrm{W}(x_1^{(1)}), \mathrm{W}(x_1^{(2)}), ..., \mathrm{W}(x_1^{(m)})$ definite in* (iii).

(Perciò la scelta di una base di $\mathrm{V}_{i,1}$ dà una decomposizione di V_i in una somma diretta di rappresentazioni isomorfe a W_i).

Dimostrazione. La formula $(*)$ ci permette di definire $p_{\alpha\beta}$ in una qualunque rappresentazione ρ di G, in particolare nella rappresentazione irriducibile $\mathrm{W}_j, j \in \mathbb{J}$. Per W_i, si ha

$$p_{\alpha\beta}(e_\gamma) = \frac{n}{g} \sum_{t \in \mathrm{G}} r_{\beta\alpha}(t^{-1}) \rho_t(e_\gamma) = \frac{n}{g} \sum_{\delta \in \mathbb{J}_i} \sum_{t \in \mathrm{G}} r_{\beta\alpha}(t^{-1}) r_{\delta\gamma}(t) e_\delta, \qquad \text{per ogni } \gamma \in \mathbb{J}_i. \qquad (**)$$

Da ciò e per il Corollario 2.2.4 si ha che

$$p_{\alpha\beta}(e_\gamma) = \begin{cases} e_\alpha & \text{se } \gamma = \beta, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dato che ciò vale per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{J}_i$, per linearità deduciamo che $\sum_{\alpha \in \mathbb{J}_i} p_{\alpha\alpha}$ è l'identità su W_i. Sia infatti $z \in \mathrm{W}_i$: z si scrive come $z = \sum_{\gamma \in \mathbb{J}_i} \lambda_\gamma e_\gamma$, con $\lambda_\gamma \in \mathbb{C}$, per ogni $\gamma \in \mathbb{J}_i$. Vale allora

$$(\sum_{\alpha \in \mathbb{J}_i} p_{\alpha\alpha})(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{J}_i} p_{\alpha\alpha}(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{J}_i} p_{\alpha\alpha}(\sum_{\gamma \in \mathbb{J}_i} \lambda_\gamma e_\gamma) = \sum_{\alpha \in \mathbb{J}_i} p_{\alpha\alpha}(\lambda_\alpha e_\alpha) = \sum_{\alpha \in \mathbb{J}_i} \lambda_\alpha e_\alpha = z.$$

Vediamo ora l'espressione di $p_{\alpha\beta} \circ p_{\gamma\delta}$. Per quanto visto prima, abbiamo che

$$p_{\alpha\beta} \circ p_{\gamma\delta}(e_\tau) = \begin{cases} p_{\alpha\beta}(e_\gamma) & \text{se } \delta = \tau, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

il che vuol dire

$$p_{\alpha\beta} \circ p_{\gamma\delta}(e_\tau) = \begin{cases} e_\alpha & \text{se } \gamma = \beta \text{ e } \delta = \tau, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

che può essere riscritto come

$$p_{\alpha\beta} \circ p_{\gamma\delta} = \begin{cases} p_{\alpha\delta} & \text{se } \beta = \gamma, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Sempre dall'espressione di $p_{\alpha\beta}$ risulta

$$\rho_s \circ p_{\alpha\gamma}(e_\delta) = \begin{cases} \rho_s e_\alpha = \sum_{\beta \in \mathbb{J}_i} r_{\beta\alpha}(s) e_\beta = \sum_{\beta \in \mathbb{J}_i} r_{\beta\alpha}(s) p_{\beta\gamma} e_\delta & \text{se } \gamma = \delta, \\ \\ 0 = \sum_{\beta \in \mathbb{J}_i} r_{\beta\alpha}(s) p_{\beta\gamma} e_\delta & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Visto che ciò è vero per ogni $\delta \in \mathbb{J}_i$, risulta

$$\rho_s \circ p_{\alpha\gamma} = \sum_{\beta \in \mathbb{J}_i} r_{\beta\alpha}(s) p_{\beta\gamma}.$$

Per W_j, $j \in \mathbb{J}, j \neq i$, siccome W_i e W_j sono rappresentazioni irriducibili non isomorfe, si utilizza il Corollario 2.2.3 e, dall'espressione $(**)$, segue che $p_{\alpha\beta}$ è uguale a zero su W_j, $j \in \mathbb{J}, j \neq i$, per ogni

$\alpha, \beta \in \mathbb{J}_i$.
Sia data ora una decomposizione di V in rappresentazioni irriducibili isomorfe a W_j, $j \in \mathbb{J}$. Per definizione di decomposizione canonica, V_j è somma diretta di rappresentazioni isomorfe a W_j, $j \in \mathbb{J}$. Dalle conseguenze di $(**)$, seguono (i) e (ii).
Sia x_1 come nelle ipotesi (iii). Vale allora

$$\rho_s(x_\alpha) = \rho_s \circ p_{\alpha 1}(x_1) = \sum_{\beta \in \mathbb{J}_i} r_{\beta\alpha}(s) p_{\beta 1}(x_1) = \sum_{\beta \in \mathbb{J}_i} r_{\beta\alpha}(s) x_\beta,$$

il che prova (iii): infatti, gli x_α sono linearmente indipendenti perché proiezioni su spazi in somma diretta per (i). Lo spazio $\mathrm{W}(x_1)$ è chiaramente di dimensione n perché n sono i suoi generatori indipendenti, ed è stabile sotto l'azione di G per l'equazione precedente.
Infine, (iv) segue da (i), (ii) e (iii): abbiamo infatti che V_i è somma diretta di $\mathrm{V}_{i,\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{J}_i$, e ogni $\mathrm{V}_{i,\alpha}$ è generato dalle immagini di $(x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, ..., x_1^{(m)})$, che sono linearmente indipendenti, attraverso l'isomorfismo $p_{\alpha 1}$, il quale definisce gli spazi $\mathrm{W}(x_1^{(j)})$, $j = 1, 2, ..., m$.

$\square$

Capitolo 3

Sottogruppi, prodotto diretto di gruppi, rappresentazioni indotte

3.1 Sottogruppi abeliani

Vediamo un primo risultato che riguarda i gruppi abeliani, in particolare le rappresentazioni irriducibili dei gruppi abeliani.

Teorema 3.1.1. *Sia* G *un gruppo. Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

(i) G *è abeliano.*

(ii) *Tutte le rappresentazioni irriducibili di* G *hanno grado* 1.

Dimostrazione. Sia g l'ordine di G, e siano $(n_1, n_2, ..., n_h)$ i gradi delle distinte rappresentazioni irriducibili di G. Per il Teorema 2.5.3, h è il numero di classi di coniugio di G; G è abeliano se e solo se il numero delle classi di coniugio di G è uguale al suo ordine g. Per il punto (i) del Corollario 2.4.3, $\sum_{i=1}^{i=h} n_i^2 = g$. Segue che $g = h$ se e solo se $n_i = 1$ per ogni $i = 1, 2, ..., h$, il che dimostra il teorema. $\square$

Corollario 3.1.2. *Sia* A *un sottogruppo abeliano di* G*, siano* a *l'ordine di* A *e* g *l'ordine di* G*. Ogni rappresentazione irriducibile di* G *ha grado minore o uguale dell'indice di* A *in* G*, dato da* $[\mathrm{G} : \mathrm{A}] = g/a$.

Dimostrazione. Sia $\rho : \mathrm{G} \to \mathbf{GL}(\mathrm{V})$ una rappresentazione irriducibile di G in V spazio vettoriale. Si può definire una rappresentazione $\rho^{\mathrm{A}} : \mathrm{A} \to \mathbf{GL}(\mathrm{V})$ di A tramite la restrizione di ρ al sottogruppo A. Sia $\mathrm{W} \subseteq \mathrm{V}$ una rappresentazione irriducibile di ρ^{A}; dal Teorema 3.1.1 segue che $\dim(\mathrm{W}) = 1$, sia dunque w un generatore di W. Sia ora V' il sottospazio vettoriale generato dalle immagini $\rho_s\mathrm{W}$ di W, al variare di s in G. Per ogni $v' \in \mathrm{V}'$, esistono $(\lambda_t)_{t\in\mathrm{G}}$, $\lambda_t \in \mathbb{C}$ per ogni $t \in \mathrm{G}$, tale che $v' = \sum_{t\in\mathrm{G}} \lambda_t \rho_t(w)$. Per ogni $s \in \mathrm{G}$, $\rho_s(v') = \sum_{t\in\mathrm{G}} \lambda_t \rho_{st}(w) \in \mathrm{V}'$, V' è dunque stabile sotto l'azione di G. Siccome ρ è irriducibile, si ha $\mathrm{V}' = \mathrm{V}$. Per $s \in \mathrm{G}$ e $t \in \mathrm{A}$ si ha

$$\rho_{st}\mathrm{W} = \rho_s\rho_t\mathrm{W} = \rho_s\rho_t^{\mathrm{A}}\mathrm{W} = \rho_s\mathrm{W}.$$

Segue quindi che il numero di $\rho_s\mathrm{W}$ può essere al massimo uguale all'indice di A in G; visto che $\mathrm{V}' = \mathrm{V}$ e che V' è somma dei $\rho_s\mathrm{W}$, segue che $\dim(\mathrm{V}) \leq g/a$. $\square$

Vediamo un esempio di questo fatto.

Esempio (gruppo diedrale D_n).
Il gruppo diedrale D_n contiene un sottogruppo isomorfo al gruppo ciclico C_n. Risulta

$$[\mathrm{D}_n : \mathrm{C}_n] = 2n/n = 2.$$

Tutte le rappresentazioni irriducibili di D_n hanno quindi grado 1 o 2.

3.2 Prodotto diretto di due gruppi

Siano G_1 e G_2 due gruppi e siano $\rho^1 : \mathrm{G}_1 \to \mathbf{GL}(\mathrm{V}_1)$ una rappresentazione di G_1 nello spazio vettoriale V_1 e $\rho^2 : \mathrm{G}_2 \to \mathbf{GL}(\mathrm{V}_2)$ una rappresentazione di G_2 nello spazio vettoriale V_2. Siamo ora interessati a definire una rappresentazione del gruppo $\mathrm{G}_1 \times \mathrm{G}_2$ prodotto diretto dei due gruppi dati. La procedura è analoga a quella che abbiamo utilizzato per costruire il prodotto tensoriale di due rappresentazioni.

Definizione. *Siano* G_1 *e* G_2 *due gruppi,* V_1 *e* V_2 *due spazi vettoriali e siano* $\rho^1 : \mathrm{G}_1 \to \mathbf{GL}(\mathrm{V}_1)$ *una rappresentazione di* G_1 *in* V_1 *e* $\rho^2 : \mathrm{G}_2 \to \mathbf{GL}(\mathrm{V}_2)$ *una rappresentazione di* G_2 *in* V_2*. Si definisce prodotto tensoriale delle rappresentazioni* ρ^1 *e* ρ^2 *la rappresentazione*

$$\rho^1 \otimes \rho^2 : \mathrm{G}_1 \times \mathrm{G}_2 \to \mathbf{GL}(\mathrm{V}_1 \otimes \mathrm{V}_2)$$

definita come

$$(\rho^1 \otimes \rho^2)(s_1, s_2) = \rho^1(s_1) \otimes \rho^2(s_2), \qquad \textit{per ogni } s_1 \in \mathrm{G}_1, s_2 \in \mathrm{G}_2.$$

Estendendo quanto abbiamo già visto nel Capitolo 2 per quanto riguarda il carattere del prodotto tensoriale di due rappresentazioni, risulta che, dati χ_1 e χ_2 i caratteri di ρ^1 e ρ^2 rispettivamente, il carattere $\chi : \mathrm{G}_1 \times \mathrm{G}_2 \to \mathbb{C}$ è dato da $\chi(s_1, s_2) = \chi_1(s_1) \cdot \chi_2(s_2)$, per ogni $s_1 \in \mathrm{G}_1, s_2 \in \mathrm{G}_2$.

Osservazione: se $\mathrm{G}_1 = \mathrm{G}_2 = \mathrm{G}$, la rappresentazione $\rho^1 \otimes \rho^2$ è una rappresentazione di $\mathrm{G} \times \mathrm{G}$. Restringendoci al sottogruppo diagonale H di $\mathrm{G} \times \mathrm{G}$ definito come $\mathrm{H} = \{(s,t) \in \mathrm{G} \times \mathrm{G} \mid s = t\}$, si ha che H è isomorfo a G e che la restrizione di $\rho^1 \otimes \rho^2$ ad H è la rappresentazione di G come è stata definita nella Sezione 1.4. Nonostante si utilizzi la stessa notazione, è importante distinguere le due rappresentazioni.

Enunciamo ora un importante teorema riguardante rappresentazioni irriducibili e prodotto tensoriale.

Teorema 3.2.1. *Siano* G_1 *e* G_2 *due gruppi di ordine* g_1 *e* g_2 *rispettivamente.*

(i) *se* ρ^1 *e* ρ^2 *sono due rappresentazioni irriducibili di* G_1 *e* G_2 *rispettivamente,* $\rho^1 \otimes \rho^2$ *è una rappresentazione irriducibile di* $\mathrm{G}_1 \times \mathrm{G}_2$*,*

(ii) *ogni rappresentazione irriducibile di* $\mathrm{G}_1 \times \mathrm{G}_2$ *è isomorfa ad una rappresentazione del tipo* $\rho^1 \otimes \rho^2$*, con* ρ^1 *rappresentazione irriducibile di* G_1 *e* ρ^2 *rappresentazione irriducibile di* G_2*.*

Dimostrazione.

(i) Siano ρ^1 e ρ^2 rappresentazioni irriducibili. Siano χ_1 e χ_2 i loro rispettivi caratteri. Per il Teorema 2.3.1, risulta

$$(\chi_1 \mid \chi_1) = \frac{1}{g_1} \sum_{s_1 \in \mathrm{G}_1} |\chi_1(s_1)|^2 = 1, \qquad (\chi_2 \mid \chi_2) = \frac{1}{g_2} \sum_{s_2 \in \mathrm{G}_2} |\chi_2(s_2)|^2 = 1.$$

Vale quindi

$$1 = \frac{1}{g_1 g_2} \sum_{\substack{s_1 \in \mathrm{G}_1, \\ s_2 \in \mathrm{G}_2}} |\chi_1(s_1)|^2 \, |\chi_2(s_2)|^2 = \frac{1}{g_1 g_2} \sum_{\substack{s_1 \in \mathrm{G}_1, \\ s_2 \in \mathrm{G}_2}} |\chi(s_1, s_2)|^2 = (\chi \mid \chi).$$

Per il Teorema 2.3.5, $\rho^1 \otimes \rho^2$ è irriducibile.

(ii) Per provare questo secondo punto è sufficiente dimostrare che, presa $f : \mathrm{G}_1 \times \mathrm{G}_2 \to \mathbb{C}$ funzione di classe che sia ortogonale ai caratteri irriducibili della forma $\chi_1(s_1)\chi_2(s_2)$, con χ_1, χ_2 caratteri irriducibili di G_1 e di G_2 rispettivamente, allora f è la funzione nulla. Sia infatti per assurdo ρ una rappresentazione irriducibile di carattere χ non isomorfa a nessuna rappresentazione del tipo $\rho^1 \otimes \rho^2$. $f = \chi$ è una funzione di classe ortogonale a tutti i caratteri irriducibili della forma $\chi_1(s_1)\chi_2(s_2)$ per il punto (ii) del Teorema 2.3.1, perché non isomorfa a nessuna rappresentazione del tipo $\rho^1 \otimes \rho^2$. Ma χ non è la funzione nulla in quanto $\chi(1) = \mathrm{Tr}(\mathbb{I})$, assurdo. Sia dunque $f : \mathrm{G}_1 \times \mathrm{G}_2 \to \mathbb{C}$ di classe e ortogonale ai caratteri irriducibili della forma $\chi_1(s_1)\chi_2(s_2)$, ossia

$$\sum_{\substack{s_1 \in \mathrm{G}_1, \\ s_2 \in \mathrm{G}_2}} f(s_1, s_2)\chi_1(s_1)^* \chi_2(s_2)^* = 0.$$

Fissato χ_2, sia ora $h : \mathrm{G}_1 \to \mathbb{C}$ tale che

$$h(s_1) = \sum_{s_2 \in \mathrm{G}_2} f(s_1, s_2)\chi_2(s_2)^*, \qquad \text{per ogni } s_1 \in \mathrm{G}_1.$$

h è una funzione di classe su G_1; siccome risulta

$$\sum_{s_1 \in \mathrm{G}_1} h(s_1)\chi_1(s_1)^* = 0, \qquad \text{per ogni } \chi_1,$$

per il Teorema 2.5.2, $h(s_1) = 0$ per ogni $s_1 \in \mathrm{G}_1$. Risulta cioè

$$\sum_{s_2 \in \mathrm{G}_2} f(s_1, s_2)\chi_2(s_2)^* = 0, \qquad \text{per ogni } \chi_2.$$

Per il Teorema 2.5.2, $f(s_1, s_2) = 0$ per ogni $s_1 \in \mathrm{G}_1, s_2 \in \mathrm{G}_2$.

□

Il Teorema 3.2.1 riduce quindi lo studio delle rappresentazioni di $\mathrm{G}_1 \times \mathrm{G}_2$ allo studio delle rappresentazioni di G_1 e delle rappresentazioni di G_2.

3.3 Rappresentazioni indotte

Definizione ed esempi

Siano G un gruppo, V uno spazio vettoriale e $\rho : \mathrm{G} \to \mathbf{GL}(\mathrm{V})$ una rappresentazione di G in V. Dato H un sottogruppo di G, è possibile definire ρ^{H} la restrizione di ρ al sottogruppo H. Sia W una sottorappresentazione di ρ^{H}, ossia un sottospazio di V stabile sotto l'azione di H attraverso la rappresentazione ρ^{H}; denotiamo con $\theta : \mathrm{H} \to \mathbf{GL}(\mathrm{W})$ tale sottorappresentazione. Per ogni $s \in \mathrm{G}$, lo spazio vettoriale $\rho_s \mathrm{W}$ dipende unicamente dalla classe laterale sinistra $s\mathrm{H}$ di H in G rappresentata da s: infatti, dato $s \in \mathrm{G}$ e $t \in \mathrm{H}$, si ha che $\rho_{st}\mathrm{W} = \rho_s \rho_t \mathrm{W} = \rho_s \mathrm{W}$. Data σ una classe laterale sinistra di H, possiamo quindi definire uno spazio vettoriale W_σ tale che $\mathrm{W}_\sigma = \rho_s \mathrm{W}$, per ogni $s \in \sigma$. I W_σ, per

$\sigma \in \mathrm{G/H}$, vengono permutati tra di loro attraverso ρ_t al variare di $t \in \mathrm{G}$:

$$\rho_t \mathrm{W}_\sigma = \rho_t \rho_s \mathrm{W} = \rho_{ts} \mathrm{W} = \mathrm{W}_\tau, \qquad \text{con } ts \in \tau \in \mathrm{G/H}.$$

La loro somma $\sum_{\sigma \in \mathrm{G/H}} \mathrm{W}_\sigma$ è dunque una sottorappresentazione di V. In particolare, siamo interessati al caso in cui questa sia una somma diretta, e tale somma diretta coincida con V.

Definizione. *Con le notazioni precedenti, diremo che la rappresentazione ρ di* G *in* V *è indotta dalla rappresentazione θ di* H *in* W *se vale*

$$\mathrm{V} = \bigoplus_{\sigma \in \mathrm{G/H}} \mathrm{W}_\sigma.$$

Notazione: dati G e H, scriveremo che (V, ρ) è indotta da (W, θ).

Presentiamo inoltre due scritture alternative di tale condizione:

(i) ogni $x \in \mathrm{V}$ può essere scritto in modo unico come $x = \sum_{\sigma \in \mathrm{G/H}} x_\sigma$, con $x_\sigma \in \mathrm{W}_\sigma$, per ogni $\sigma \in \mathrm{G/H}$;

(ii) dato R un insieme di rappresentanti di G/H, lo spazio vettoriale V è la somma diretta dei $\rho_r \mathrm{W}$ al variare di $r \in \mathrm{R}$, ossia $\mathrm{V} = \bigoplus_{r \in \mathrm{R}} \rho_r \mathrm{W}$.

Dalla scrittura (ii) segue che $\dim(\mathrm{V}) = \sum_{r \in \mathrm{R}} \dim(\rho_r \mathrm{W}) = [\mathrm{G} : \mathrm{H}] \cdot \dim(\mathrm{W})$.

Vediamo ora alcuni esempi.

Esempio 1 (rappresentazione regolare).
Sia G un gruppo e sia V la rappresentazione regolare di G. Esiste dunque una base $(e_s)_{s \in \mathrm{G}}$ di V tale che $\rho_s e_r = e_{sr}$ per ogni $s, r \in \mathrm{G}$. Sia H un sottogruppo di G e sia W il sottospazio di V che ha come base $(e_t)_{t \in \mathrm{H}}$. Con le notazioni precedenti, la rappresentazione θ di H in W è la rappresentazione regolare di H. Dato $s \in \sigma \in \mathrm{G/H}$, risulta che $\rho_s((e_t)_{t \in \mathrm{H}}) = (e_k)_{k \in \sigma}$, l'insieme $(e_k)_{k \in \sigma}$ può quindi essere scelto come base per $\mathrm{W}_\sigma = \rho_s \mathrm{W}$. Risulta $\bigcup_{\sigma \in \mathrm{G/H}} (e_k)_{k \in \sigma} = (e_s)_{s \in \mathrm{G}}$, inoltre $\sigma \cap \tau = \emptyset$ per ogni $\sigma, \tau \in \mathrm{G/H}, \sigma \neq \tau$. Si ha quindi $\mathrm{V} = \bigoplus_{\sigma \in \mathrm{G/H}} \mathrm{W}_\sigma$, ossia ρ è indotta da θ.

Esempio 2 (rappresentazione delle permutazioni).
Sia G un gruppo e V uno spazio vettoriale tale che esista $(e_\sigma)_{\sigma \in \mathrm{G/H}}$ base di V. Si definisca ρ rappresentazione di G in V in modo tale che $\rho_t e_\sigma = e_\tau$, con $s \in \sigma \in \mathrm{G/H}, ts \in \tau \in \mathrm{G/H}$. Quella così ottenuta è detta rappresentazione delle permutazioni di G associata a G/H. Il vettore e_H corrispondente alla classe laterale H è invariante sotto l'azione di H: infatti, per ogni $t \in \mathrm{H}$, $t\mathrm{H} = \mathrm{H}$, segue quindi che $\rho_t e_\mathrm{H} = e_\mathrm{H}$ per ogni $t \in \mathrm{H}$. La rappresentazione ρ ristretta ad H è dunque, nel sottospazio W generato da e_H, la rappresentazione banale di H in W. Dato R un insieme di rappresentanti di G/H, si ha che $\bigcup_{r \in \mathrm{R}} e_{r\mathrm{H}} = \bigcup_{\sigma \in \mathrm{G/H}} e_\sigma$ e che $e_{r_1\mathrm{H}} \neq e_{r_2\mathrm{H}}$, per ogni $r_1, r_2 \in \mathrm{R}, r_1 \neq r_2$. La rappresentazione ρ è dunque indotta da quella banale di H in W.

Esempio 3 (somma diretta).
Sia G un gruppo e siano V_1, V_2 due spazi vettoriali. Siano inoltre ρ^1 una rappresentazione di G in V_1 e ρ^2 una rappresentazione di G in V_2. Se ρ^1 è indotta da una rappresentazione θ^1 e ρ^2 è indotta da una rappresentazione θ^2, allora la rappresentazione somma diretta delle due rappresentazioni ρ^1 e ρ^2 è indotta dalla rappresentazione somma diretta delle due rappresentazioni θ^1 e θ^2. Infatti, usando le notazioni della definizione di rappresentazione indotta, siano $\theta = \theta^1$ e $\mathrm{W} = \mathrm{W}^1$ per quanto riguarda ρ^1; $\theta = \theta^2$ e $\mathrm{W} = \mathrm{W}^2$ per quanto riguarda ρ^2. Si ha che

$$\mathrm{V}_1 = \bigoplus_{\sigma \in \mathrm{G/H}} \mathrm{W}^1_\sigma, \qquad \mathrm{V}_2 = \bigoplus_{\sigma \in \mathrm{G/H}} \mathrm{W}^2_\sigma.$$

Ma allora

$$V_1 \oplus V_2 = \Bigg(\bigoplus_{\sigma \in G/H} W_\sigma^1 \Bigg) \oplus \Bigg(\bigoplus_{\sigma \in G/H} W_\sigma^2 \Bigg) = \bigoplus_{\sigma \in G/H} \left(W_\sigma^1 \oplus W_\sigma^2 \right).$$

Esempio 4 (sottospazio stabile).
Siano G un gruppo e H un suo sottogruppo. Sia inoltre ρ una rappresentazione di G in uno spazio vettoriale V tale che (V, ρ) è indotta da (W, θ). Sia W_1 un sottospazio di W stabile sotto l'azione di H e sia R un insieme di rappresentanti di G/H. Definiamo

$$V_1 = \sum_{r \in R} \rho_r W_1.$$

Questa è una buona definizione: possiamo infatti prendere un qualunque insieme R di rappresentanti dato che W_1 è stabile sotto l'azione di H. V_1 è stabile sotto l'azione di G. Per ogni $s \in G$ vale infatti

$$\rho_s V_1 = \sum_{r \in R} \rho_s \rho_r W_1 = \sum_{r \in R} \rho_{sr} W_1 = \sum_{t \in R} \rho_t W_1 = V_1.$$

Inoltre, la rappresentazione di G in V_1 è indotta dalla rappresentazione di H in W_1.

Esempio 5 (prodotto tensoriale).
Siano G un gruppo e H un suo sottogruppo. Sia inoltre ρ una rappresentazione di G in uno spazio vettoriale V e $\hat{\rho}$ una rappresentazione di G in uno spazio vettoriale V'. Sia inoltre $\hat{\rho}^H$ la restrizione di $\hat{\rho}$ ad H. Se (ρ, V) è indotta da (θ, W), allora $\rho \otimes \hat{\rho}$ è indotta da $\theta \otimes \hat{\rho}^H$. Si ha infatti che $V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} W_\sigma$, da cui

$$V \otimes V' = \Bigg(\bigoplus_{\sigma \in G/H} W_\sigma \Bigg) \otimes V' = \bigoplus_{\sigma \in G/H} \Big(W_\sigma \otimes V' \Big).$$

Esistenza ed unicità

Vediamo ora che, dati un gruppo G, un suo sottogruppo H e una rappresentazione di H, esiste una rappresentazione di G indotta da quella di H. Tale rappresentazione di G è unica a meno di isomorfismo.

Lemma 3.3.1. *Siano* G *un gruppo,* H *un suo sottogruppo,* V *uno spazio vettoriale e* W *un suo sottospazio. Siano ρ una rappresentazione di* G *in* V *e θ una rappresentazione di* H *in* W *tale che* (V, ρ) *è indotta da* (W, θ). *Sia inoltre* $\rho' : G \to \mathbf{GL}(V')$ *una rappresentazione di* G *in uno spazio vettoriale* V' *e sia* $f : W \to V'$ *una mappa lineare tale che* $f(\theta_t w) = \rho'_t f(w)$ *per ogni* $t \in H$ *e per ogni* $w \in W$. *Allora esiste un'unica mappa lineare* $F : V \to V'$ *che estende* f *(ossia coincide con* f *su* W*) e che soddisfa* $F \circ \rho_s = \rho'_s \circ F$ *per ogni* $s \in G$.

Dimostrazione. Sia $x \in V$. Siccome (V, ρ) è indotta da (W, θ), ogni elemento di V si può scrivere in modo unico come somma di elementi del tipo $x_s \in \rho_s W$, al variare di $s \in G$. Per linearità, possiamo supporre $x \in \rho_s W$ per un certo $s \in G$. Si ha quindi $\rho_s^{-1} x \in W$, da cui, per le proprietà di F, risulta

$$F(x) = F(\rho_s \rho_s^{-1} x) = \rho'_s F(\rho_s^{-1} x) = \rho'_s f(\rho_s^{-1} x).$$

Questo dimostra l'unicità di F.
Sia ora $x \in W_\sigma$. Scelto un certo $s \in \sigma$, definiamo $F(x) = \rho'_s f(\rho_s^{-1} x)$. Tale F, estesa per linearità alla somma diretta dei W_σ, è una mappa lineare da V a V'. Dobbiamo solo controllare che tale definizione sia indipendente dalla scelta di $s \in \sigma$. Sia dunque $t \in H$; si ha che $st \in \sigma$ e

$$\rho'_{st} f(\rho_{st}^{-1} x) = \rho'_s \rho'_t f(\rho_t^{-1} \rho_s^{-1} x) = \rho'_s \rho'_t f(\theta_t^{-1} \rho_s^{-1} x) = \rho'_s f(\theta_t \theta_t^{-1} \rho_s^{-1} x) = \rho'_s f(\rho_s^{-1} x),$$

e ciò vale per ogni $t \in \mathrm{H}$. F è dunque ben definita su W_σ, per ogni $\sigma \in \mathrm{G}/\mathrm{H}$. Siccome (V, ρ) è indotta da (W, θ), F è ben definita su tutto V. Abbiamo dimostrato che tale F è inoltre unica e che estende f, inoltre soddisfa $\mathrm{F} \circ \rho_s = \rho'_s \circ \mathrm{F}$ per ogni $s \in \mathrm{G}$ per definizione. □

Teorema 3.3.2. *Siano* G *un gruppo,* H *un suo sottogruppo e* W *uno spazio vettoriale. Sia θ una rappresentazione di* H *in* W*. Allora esiste ρ rappresentazione di* G *in uno spazio vettoriale* V *tale che* (V, ρ) *è indotta da* (W, θ)*. La rappresentazione ρ è unica a meno di isomorfismo.*

Dimostrazione. Per quanto riguarda l'esistenza, grazie all'Esempio 3 e al Teorema 1.3.1, non è riduttivo supporre θ irriducibile. Per il Corollario 2.4.2, θ è isomorfa a una sottorappresentazione della rappresentazione regolare di H. Grazie all'Esempio 1 sappiamo che la rappresentazione regolare di H induce la rappresentazione regolare di G. Per l'Esempio 4, la sottorappresenatzione θ della rappresentazione regolare di H induce una sottorappresentazione ρ della rappresentazione regolare di G. Questo dimostra dunque l'esistenza.
Vediamo ora l'unicità a meno di isomorfismo. Siano (V, ρ) e (V', ρ') due rappresentazioni indotte da (W, θ). Con riferimento al Lemma 3.3.1, sia $f : \mathrm{W} \hookrightarrow \mathrm{V}'$ l'immersione di W in V′. f è lineare e, per definizione di rappresentazione indotta, vale $f(\theta_t w) = \rho'_t f(w)$. Per il Lemma 3.3.1, esiste unica $\mathrm{F} : \mathrm{V} \to \mathrm{V}'$ lineare tale che F è l'identità su W e che soddisfa $\mathrm{F} \circ \rho_s = \rho'_s \circ \mathrm{F}$ per ogni $s \in \mathrm{G}$. In particolare, vale

$$\mathrm{F} \circ \rho_s \mathrm{W} = \rho'_s \circ \mathrm{F}\mathrm{W} = \rho'_s \mathrm{W}, \qquad \text{per ogni } s \in \mathrm{G}.$$

Al variare di $s \in \mathrm{G}$, e ricordando che (V, ρ) e (V', ρ') sono indotte da (W, θ), questo implica che $\mathrm{F}(\mathrm{V}) = \mathrm{V}'$. Inoltre, $\dim(\mathrm{V}) = [\mathrm{G} : \mathrm{H}] \cdot \dim(\mathrm{W}) = \dim(\mathrm{V}')$. F è dunque un isomorfismo. □

Carattere

Siano G un gruppo, H un suo sottogruppo, V uno spazio vettoriale e W un suo sottospazio. Siano ρ una rappresentazione di G in V di carattere χ_ρ e θ una rappresentazione di H in W di carattere χ_θ tale che (V, ρ) è indotta da (W, θ). Siccome il Teorema 3.3.2 ci garantisce che (W, θ) determina (V, ρ) a meno di isomorfismo, ci si chiede se sia possibile determinare χ_ρ da χ_θ.

Teorema 3.3.3. *Nelle ipotesi precedenti, sia h l'ordine di* H *e sia* R *un insieme di rappresentanti di* G/H*. Per ogni $u \in \mathrm{G}$, si ha*

$$\chi_\rho(u) = \sum_{\substack{r \in \mathrm{R}, \\ r^{-1}ur \in \mathrm{H}}} \chi_\theta(r^{-1}ur) = \frac{1}{h} \sum_{\substack{s \in \mathrm{G}, \\ s^{-1}us \in \mathrm{H}}} \chi_\theta(s^{-1}us).$$

In particolare, χ_ρ è la combinazione lineare dei valori di χ_θ sull'intersezione di H *con la classe di coniugio di u in* G*.*

Dimostrazione. Lo spazio vettoriale V è la somma diretta di $\rho_r \mathrm{W}$ al variare di $r \in \mathrm{R}$. Inoltre, dato $u \in \mathrm{G}$, si ha che ρ_u permuta i $\rho_r \mathrm{W}$ tra di loro. Più precisamente, se scriviamo ur nella forma $r_u t$, con $r_u \in \mathrm{R}$, $t \in \mathrm{H}$, si ha che $\rho_u \rho_r \mathrm{W} = \rho_{ur} \mathrm{W} = \rho_{r_u t} \mathrm{W} = \rho_{r_u} \rho_t \mathrm{W} = \rho_{r_u} \mathrm{W}$, ossia ρ_u manda $\rho_r \mathrm{W}$ in $\rho_{r_u} \mathrm{W}$. Per determinare $\chi_\rho(u) = \mathrm{Tr}_\mathrm{V}(\rho_u)$ (dove con Tr_X indicheremo l'operatore traccia nello spazio vettoriale X), possiamo usare una base di V che sia unione di basi sui $\rho_r \mathrm{W}$, al variare di $r \in \mathrm{R}$. Gli indici $r \in \mathrm{R}$ tali che $r \neq r_u$ danno un contributo nullo, gli altri danno la traccia di ρ_u sullo spazio $\rho_r \mathrm{W}$. Risulta

$$\chi_\rho(u) = \sum_{r \in \mathrm{R}_u} \mathrm{Tr}_{\rho_r \mathrm{W}}(\rho_{u,r}),$$

dove $\mathrm{R}_u \subseteq \mathrm{R}$ denota l'insieme degli $r \in \mathrm{R}$ tali che $r = r_u$, e $\rho_{u,r}$ è la restrizione di ρ_u a $\rho_r \mathrm{W}$. In particolare, $r \in \mathrm{R}_u$, ossia $r = r_u$, se e solo se esiste un $t \in \mathrm{H}$ tale che $ur = rt$, cioè se e solo se $r^{-1}ur \in \mathrm{H}$. Rimane da calcolare $\mathrm{Tr}_{\rho_r \mathrm{W}}(\rho_{u,r})$, per $r \in \mathrm{R}_u$. Per fare ciò, notiamo che ρ_r definisce un isomorfismo da W in ρ_rW, e che, con $t = r^{-1}ur \in$ H (ossia $rt = ur$), risulta

$$\rho_r \circ \theta_t = \rho_{u,r} \circ \rho_r.$$

Per la proprietà di invarianza per similitudine della traccia, la traccia di $\rho_{u,r}$ è uguale a quella di θ_t, cioè

$$\mathrm{Tr}_{\rho_r \mathrm{W}}(\rho_{u,r}) = \chi_\theta(t) = \chi_\theta(r^{-1}ur).$$

Si ottiene dunque

$$\chi_\rho(u) = \sum_{r \in \mathrm{R}_u} \chi_\theta(r^{-1}ur) = \sum_{\substack{r \in \mathrm{R}, \\ r^{-1}ur \in \mathrm{H}}} \chi_\theta(r^{-1}ur).$$

Sia ora $s \in$ G. Esiste $r_s \in$ R tale che $s \in r_s$H, ossia esiste un $t_s \in$ H tale che $s = r_s t_s$. In particolare $\#(r_s\mathrm{H}) = h$. Ricordando che χ_θ è una funzione di classe su H, risulta

$$\frac{1}{h} \sum_{\substack{s \in \mathrm{G}, \\ s^{-1}us \in \mathrm{H}}} \chi_\theta(s^{-1}us) = \frac{1}{h} \sum_{\substack{r \in \mathrm{R}, \\ t \in \mathrm{H}, \\ (rt)^{-1}urt \in \mathrm{H}}} \chi_\theta((rt)^{-1}urt) = \frac{1}{h} \sum_{\substack{r \in \mathrm{R}, \\ r^{-1}ur \in \mathrm{H}}} \sum_{t \in \mathrm{H}} \chi_\theta(r^{-1}ur) = \sum_{\substack{r \in \mathrm{R}, \\ r^{-1}ur \in \mathrm{H}}} \chi_\theta(r^{-1}ur).$$

□

Capitolo 4

Esempi

4.1 Il gruppo ciclico C_n

Descriveremo C_n con l'insieme $\{1, r, r^2, ..., r^{n-1}\}$ tale che $r^i r^j = r^{i+j}$ e $r^n = 1$. Siccome C_n è un gruppo abeliano, per il Teorema 3.1.1 ogni rappresentazione irriducibile di C_n ha grado 1. Per quanto abbiamo già visto, risulta $\chi(r) = w \in \mathbb{C}$ tale che $\chi(r^k) = w^k$; siccome $r^n = 1$, risulta $w^n = 1$. Abbiamo quindi n possibili caratteri irriducibili, che indicheremo con $\chi_0, \chi_1, \chi_2, ..., \chi_{n-1}$, corrispondenti alla scelta di w nell'insieme $(e^{2\pi i h/n})_{h=0,1,2,...,n-1}$. Risulta evidente che la scelta di $h = 0$ corrisponde alla rappresentazione banale. Per quanto detto, risulta

$$\chi_h(r^k) = e^{2\pi i hk/n}.$$

Fissiamo ad esempio $n = 4$ e sia $z = e^{2\pi i/4}$. La tabella dei caratteri di C_4 è la seguente.

	1	r	r^2	r^3
χ_0	1	1	1	1
χ_1	1	z	z^2	z^3
χ_2	1	z^2	1	z^2
χ_3	1	z^3	z^2	z

4.2 Il gruppo diedrale D_n

Identificheremo D_n con il gruppo delle isometrie del piano che lasciano immutato un poligono regolare a n lati. In particolare, avremo n rotazioni ed n riflessioni. Identificando il piano con $\mathbb{R}^2$, ponendo un vertice del poligono regolare nel punto $(1, 0)$ e ponendo il centro del poligono nell'origine, indicheremo con r la rotazione di centro l'origine e di angolo $2\pi/n$ e con s la riflessione rispetto all'asse x. Ricordiamo che ogni elemento del gruppo può essere scritto come $s^i r^k$, con $i \in \{0, 1\}$ e $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$. Ricordiamo inoltre le relazioni fondamentali

$$r^n = 1, \qquad s^2 = 1, \qquad srs = r^{-1}.$$

Si ha in particolare che $r^{-k} = r^{-1}r^{-1} \cdots r^{-1} = srs \cdot srs \cdots srs = sr^k s$, da cui $1 = sr^k sr^k = (sr^k)^2$.

Rappresentazioni irriducibili del gruppo D_n, con n pari

Cominciamo con le rappresentazioni di grado 1. Si ha che $1 = \rho(1) = \rho(s^2) = \rho(s)^2$, necessariamente $\rho(s)$ è una radice seconda dell'identità. Inoltre, per ogni $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$, si ha $1 = \rho(1) = \rho((sr^k)^2) = \rho(sr^k)^2$. Necessariamente $\rho(sr^k)$ è anch'esso una radice seconda dell'identità, e lo è anche $\rho(r^k)$ dato che $\rho(sr^k) = \rho(s)\rho(r^k)$; la condizione $1 = \rho(1) = \rho(r^n) = \rho(r)^n$ non pone alcun vincolo alla scelta di $\rho(r)$ perché n è pari. Si ha poi che $\rho(r^k) = \rho(r)^k$. Visto che χ coincide con ρ nelle rappresentazioni di grado 1, abbiamo quattro caratteri irriducibili, corrispondenti ciascuno ad una scelta diversa di $(\chi(r), \chi(s)) \in \{1, -1\}^2$. La tabella dei caratteri delle rappresentazioni di grado 1 è la seguente.

	r^k	sr^k
ψ_1	1	1
ψ_2	1	-1
ψ_3	$(-1)^k$	$(-1)^k$
ψ_4	$(-1)^k$	$(-1)^{k+1}$

Passiamo ora alle rappresentazioni di grado 2.

Sia $w = e^{2\pi i/n}$ e sia $h \in \{0, 1, ..., n-1\}$. Definiamo una rappresentazione ρ^h di D_n nel seguente modo

$$\rho^h(r^k) = \begin{pmatrix} w^{hk} & 0 \\ 0 & w^{-hk} \end{pmatrix}, \qquad \rho^h(sr^k) = \begin{pmatrix} 0 & w^{-hk} \\ w^{hk} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{per ogni } k \in \{0, 1, ..., n-1\}.$$

Un calcolo diretto mostra che questa è effettivamente una rappresentazione. Sia H il sottogruppo di D_n isomorfo a C_n, generato quindi dagli r^k, $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$. Fissato $h \in \{0, 1, ..., n-1\}$, sia W^h il sottospazio vettoriale di $V = \mathbb{C}^2$ generato dal versore e_1 della base canonica di V. Si ha che $\rho^h : H \to \mathbf{GL}(W^h)$ definita come sopra è una rappresentazione di H, isomorfa alla rappresentazione χ_h definita nella sezione precedente. In particolare, (V, ρ^h) è indotta da (W^h, χ_h), questo per ogni $h \in \{0, 1, ..., n-1\}$. Sia ora ϕ_h il carattere di ρ^h, per ogni $h \in \{0, 1, ..., n-1\}$. Si ha che $\phi_h = \phi_{n-h}$, e dunque ρ^h è isomorfa a ρ^{n-h} per ogni $h \in \{0, 1, ..., n-1\}$. Vediamo dunque i casi $0 \leq h \leq n/2$.
Per $h = 0$ si ha

$$\rho^0(r^k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \rho^0(sr^k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{per ogni } k \in \{0, 1, ..., n-1\}.$$

I sottospazi V_1 e V_2 di V generati dai vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

rispettivamente, sono invarianti sotto l'azione di D_n rappresentato da ρ^0. ρ^0 non è irriducibile e in particolare si vede che $\phi_0 = \psi_1 + \psi_2$.
Per $h = n/2$ si ha

$$\rho^{n/2}(r^k) = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix}, \qquad \rho^{n/2}(sr^k) = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^k \\ (-1)^k & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{per ogni } k \in \{0, 1, ..., n-1\}.$$

I sottospazi V_1 e V_2 di V generati dai vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

rispettivamente, sono invarianti sotto l'azione di D_n rappresentato da $\rho^{n/2}$. $\rho^{n/2}$ non è irriducibile e in particolare si vede che $\phi_{n/2} = \psi_3 + \psi_4$.
Per quanto riguarda invece $0 < h < n/2$, si ha che gli unici sottospazi stabili per $\rho^h(r^k)$ sono quelli generati dai versori della base canonica di V e_1 e e_2, e nessuno dei due è stabile per $\rho^h(sr^k)$. ρ^h è quindi irriducibile per $h \in \{1, 2, ..., n/2 - 1\}$. Inoltre, i rispettivi caratteri sono dati da

$$\begin{aligned}\phi_h(r^k) &= w^{hk} + w^{-hk} = 2\,\frac{e^{2\pi ihk/n} + e^{-2\pi ihk/n}}{2} = 2\cos\frac{2\pi hk}{n},\\ \phi_h(sr^k) &= 0.\end{aligned}$$

Da ciò segue che le rappresentazioni ρ^h sono mutuamente non isomorfe per $h \in \{1, 2, ..., n/2 - 1\}$.
Queste sono tutte e sole le rappresentazioni irriducibili di D_n. Risulta infatti

$$\sum_{i=1}^{i=4} (grado(\psi_i))^2 + \sum_{j=1}^{j=n/2-1} (grado(\phi_j))^2 = 4 \cdot 1^2 + (n/2 - 1) \cdot 2^2 = 4 + 2n - 4 = 2n = \#(\mathrm{D}_n).$$

Rappresentazioni irriducibili del gruppo D_n, con n dispari

Per quanto riguarda le rappresentazioni di grado 1, il discorso è simile a quello fatto per il caso n pari. Qui entra però in gioco la condizione $1 = \rho(1) = \rho(r^n) = \rho(r)^n$, in quanto in questo caso n è dispari: ciò significa che non è più lecita la scelta $\rho(r) = -1$. La tabella dei caratteri delle rappresentazioni di grado 1 è la seguente.

	r^k	sr^k
ψ_1	1	1
ψ_2	1	-1

Passiamo ora alle rappresentazioni di grado 2.

Il discorso è ancora una volta simile a quello fatto per il caso n pari. Questa volta, l'isomorfismo tra ρ^h e ρ^{n-h} per ogni $h \in \{0, 1, ..., n-1\}$ ci porta ad analizzare i casi $0 \le h \le (n-1)/2$.
Per $h = 0$ vale ancora $\phi_0 = \psi_1 + \psi_2$, mentre in questo caso $\phi_{(n-1)/2}$ è irriducibile. Abbiamo dunque $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_{(n-1)/2}$ caratteri irriducibili di rappresentazioni di grado 2.
Questi sono tutti e soli i caratteri irriducibili di D_n. Risulta infatti

$$\sum_{i=1}^{i=2} (grado(\psi_i))^2 + \sum_{j=1}^{j=(n-1)/2} (grado(\phi_j))^2 = 2 \cdot 1^2 + \frac{n-1}{2} \cdot 2^2 = 2 + 2n - 2 = 2n = \#(\mathrm{D}_n).$$

4.3 Il gruppo D_{nh}

Sia D_{nh} il gruppo descritto dal prodotto diretto dei gruppi D_n e C_2. Scriveremo $\mathrm{D}_{nh} = \mathrm{D}_n \times \mathrm{C}_2$. Indicheremo il generatore di C_2 con ι e gli elementi di D_n come abbiamo fatto in precedenza. Per il Teorema 3.2.1, tutte le rappresentazioni irriducibili di D_{nh} sono date dal prodotto tensoriale tra le rappresentazioni irriducibili di D_n e quelle di C_2. Il gruppo C_2, come visto in precedenza, ha due caratteri irriducibili di grado 1 dati dalla seguente tabella.

	1	ι
u	1	1
v	1	-1

D_{nh} ha il doppio delle rappresentazioni irriducibili di D_n. In particolare, per ogni carattere irriducibile χ di D_n, esistono due caratteri irriducibili di D_{nh} dati da

	$(x,1)$	(x,ι)
χ_u	$\chi(x)$	$\chi(x)$
χ_v	$\chi(x)$	$-\chi(x)$

per ogni $x \in D_n$. Dato ad esempio h intero, $0 < h < n/2$, si ottiene la seguente tabella.

	$(r^k,1)$	$(sr^k,1)$	(r^k,ι)	(sr^k,ι)
ϕ_{h_u}	$2\cos(2\pi hk/n)$	0	$2\cos(2\pi hk/n)$	0
ϕ_{h_v}	$2\cos(2\pi hk/n)$	0	$-2\cos(2\pi hk/n)$	0

4.4 Il gruppo alterno $\mathfrak{A}_4$

Sia $\mathfrak{A}_4$ il sottogruppo delle permutazioni pari di $\mathfrak{S}_4$. Ricordiamo alcune sue proprietà che ci saranno utili nello studio dei caratteri irriducibili. Il gruppo alterno $\mathfrak{A}_4$ contiene 12 elementi:

- l'elemento neutro 1;
- 3 elementi di ordine 2, corrispondenti ai prodotti di due trasposizioni, $x = (ab)(cd)$, $y = (ac)(bd)$, $z = (ad)(bc)$;
- 8 elementi di ordine 3, $t = (abc)$, (acb), (abd), (adb), (acd), (adc), (bcd), (bdc).

Dati inoltre i sottogruppi $K = \{1, t, t^2\}$ e $H = \{1, x, y, z\}$, si dimostra che

$$txt^{-1} = z, \qquad tzt^{-1} = y, \qquad tyt^{-1} = x.$$

Si ha inoltre che H è un sottogruppo normale, che $H \cap K = \{1\}$ e che ogni elemento di $\mathfrak{A}_4$ può essere scritto in modo unico come il prodotto di un elemento di H per un elemento di K. $\mathfrak{A}_4$ è dunque il prodotto semidiretto di K per il sottogruppo normale H.
Passiamo ora alle classi di coniugio.

- $C_1 = \{1\}$;
- $C_2 = \{x, y, z\}$;
- $C_3 = \{t, tx, ty, tz\}$;
- $C_4 = \{t^2, t^2x, t^2y, t^2z\}$.

Abbiamo dunque 4 caratteri irriducibili.
Analizziamo quelli di grado 1. Notiamo che K è isomorfo a C_3: abbiamo dunque i caratteri χ_0, χ_1, χ_2 definiti all'inizio del capitolo, indicando questa volta con t un generatore. Possiamo estendere questi caratteri ad ogni elemento del gruppo $\mathfrak{A}_4$: sia infatti $s \in \mathfrak{A}_4$, s si può scrivere come $s = kh$ con $k \in K$, $h \in H$. Si definisce $\chi_j(s) = \chi_j(kh) = \chi_j(k)$, per ogni $s \in \mathfrak{A}_4$, $j = 0, 1, 2$.
Per il punto (i) del Corollario 2.4.3, l'ultimo carattere ψ deve avere grado 3. Si ha perciò $\psi(1) = 3$. Posto $w = e^{2\pi i/3}$, per il Corollario 2.4.2, si possono calcolare gli altri valori di ψ: $0 = 1+1+1+3\psi(x)$, $0 = 1 + w + w^2 + 3\psi(t)$, $0 = 1 + w^2 + w + 3\psi(t^2)$.
La tabella dei caratteri di $\mathfrak{A}_4$ è la seguente.

	1	x	t	t^2
χ_0	1	1	1	1
χ_1	1	1	w	w^2
χ_2	1	1	w^2	w
ψ	3	-1	0	0

4.5 Il gruppo simmetrico $\mathfrak{S}_4$

Sia $\mathfrak{S}_4$ il gruppo delle permutazioni di 4 elementi. Il gruppo simmetrico $\mathfrak{S}_4$ contiene 24 elmenti:

- l'elemento neutro 1;
- 6 trasposizioni, (ab), (ac), (ad), (bc), (bd), (cd);
- 3 elementi di ordine 2 contenuti in $\mathfrak{A}_4$, $x = (ab)(cd)$, $y = (ac)(bd)$, $z = (ad)(bc)$;
- 8 elementi di ordine 3, (abc), (acb), (abd), (adb), (acd), (adc), (bcd), (bdc);
- 6 elementi di ordine 4, $(abcd)$, $(abdc)$, $(acbd)$, $(acdb)$, $(adbc)$, $(adcb)$.

Siano ora $\mathrm{H} = \{1, x, y, z\}$ e L il gruppo delle permutazioni che lasciano fisso l'elemento d, in particolare $\mathrm{L} = \{1, (ab), (ac), (bc), (abc), (acb)\}$, con L isomorfo a $\mathfrak{S}_3$. H è un sottogruppo normale, $\mathrm{H} \cap \mathrm{L} = \{1\}$ e ogni elemento di $\mathfrak{S}_4$ può essere scritto in modo unico come il prodotto di un elemento di H per un elemento di L. $\mathfrak{S}_4$ è dunque il prodotto semidiretto di L per il sottogruppo normale H.
Passiamo ora alle classi di coniugio.

- $\mathrm{C}_1 = \{1\}$;
- $\mathrm{C}_2 = \{x, y, z\}$;
- $\mathrm{C}_3 = \{(ab), (ac), (bc), (ab)x, (ac)y, (bc)z\}$;
- $\mathrm{C}_4 = \{(abc), (acb), (abc)x, (abc)y, (abc)z, (acb)x, (acb)y, (acb)z\}$;
- $\mathrm{C}_5 = \{(ab)y, (ab)z, (ac)x, (ac)z, (bc)x, (bc)y\}$.

Ricordando lo studio di $\mathfrak{S}_3$ fatto nel Capitolo 2, possiamo estendere ogni carattere di $\mathfrak{S}_3$: sia infatti $s \in \mathfrak{S}_4$, s si può scrivere come $s = lh$ con $l \in \mathrm{L}$, $h \in \mathrm{H}$. Si definisce $\chi_j(s) = \chi_j(lh) = \chi_j(l)$, per ogni $s \in \mathfrak{A}_4$, $j = 0, 1, 2$ definiti nell'esempio della Sezione 2.5.
Per il punto (i) del Corollario 2.4.3, abbiamo che per i gradi n e n_1 delle ultime due rappresentazioni irriducibili di carattere ψ e ψ_1 rispettivamente, vale $n^2 + n_1^2 = 18$, che implica $n = n_1 = 3$. Per il punto (ii) del Corollario 2.4.3, valgono le seguenti uguaglianze

$$\begin{aligned}\psi((ab)) &= -\psi_1((ab)),\\ \psi((ab)(cd)) &= -\psi_1((ab)(cd)) - 2,\\ \psi((abc)) &= -\psi_1((abc)),\\ \psi((abcd)) &= -\psi_1((abcd)).\end{aligned}$$

Siccome χ_1 ha grado 1 ed è non banale, sappiamo che ψ_1 è il carattere della rappresentazione prodotto tensoriale tra la rappresentazione di χ_1 e quella di ψ: tale rappresentazione è infatti irriducibile perché ψ lo è. Abbiamo $\psi((abc)) = -\psi_1((abc))$ e $\psi((abc)) = \psi_1((abc))$, da cui $\psi((abc)) = \psi_1((abc)) = 0$. Inoltre, la seconda uguaglianza implica $\psi((ab)(cd)) = \psi_1((ab)(cd)) = -1$. Affinché siano caratteri irriducibili, ossia di norma 1, deve valere $(\psi((ab)))^2 = (\psi((abcd)))^2 = 1$. Vale inoltre $(\chi_0 \mid \psi) = 0$, il che implica $\psi((ab)) = -\psi((abcd))$. Non resta quindi che scegliere in modo arbitrario il valore di $\psi((ab))$ nell'insieme $\{1, -1\}$: con una scelta otterremo $\psi = \theta$, $\psi_1 = \gamma$, con l'altra scelta $\psi = \gamma$, $\psi_1 = \theta$, con θ, γ gli ultimi due caratteri irriducibili di $\mathfrak{S}_4$. Sia dunque ad esempio $\psi((ab)) = 1$. La tabella dei caratteri di $\mathfrak{S}_4$ è la seguente.

	1	(ab)	$(ab)(cd)$	(abc)	$(abcd)$
χ_0	1	1	1	1	1
χ_1	1	-1	1	1	-1
χ_2	2	0	2	-1	0
ψ	3	1	-1	0	-1
$\chi_1\psi$	3	-1	-1	0	1

Capitolo 5

Algebra di gruppo

5.1 Nozioni preliminari

Definizione. *Sia* K *un anello commutativo con unità. Una* K*-algebra (o algebra su* K*, o ancora semplicemente algebra quando ciò non creerà confusione) è un* K*-modulo* A *sul quale è definita una mappa bilineare* $\varphi : \mathrm{A} \times \mathrm{A} \to \mathrm{A}$ *(che indicheremo con* $\varphi(x, y) = xy$*, per ogni* $x, y \in \mathrm{A}$*) tale che sia associativa. Devono cioè valere le seguenti identità:*

$$(a \cdot x + b \cdot y)z = a \cdot xz + b \cdot yz, \qquad z(a \cdot x + b \cdot y) = a \cdot zx + b \cdot zy, \qquad \textit{per ogni } x, y, z \in \mathrm{A}, a, b \in \mathrm{K}.$$

In particolare, ogni algebra è un anello con unità.

Diamo ora due importanti definizioni riguardanti le algebre.

Definizione. *Sia* K *un anello commutativo e sia* A *un'algebra su* K. A *è detta algebra semisemplice se ogni* A*-modulo è semisemplice.*

Ricordiamo che un modulo M è detto semisemplice se ogni suo sottomodulo è addendo diretto di M. In particolare, un sottomodulo M_1 di M è un addendo diretto di M se esiste un altro sottomodulo M_2 di M (detto complementare di M_1 in M) tale che $\mathrm{M} = \mathrm{M}_1 \oplus \mathrm{M}_2$.

Definizione. *Sia* D *un'algebra su un campo tale da non consistere nel solo elemento nullo. Se ogni elemento non nullo di* D *è invertibile, allora* D *è detta algebra di divisione.*

Enunciamo ora un risultato di classificazione delle algebre semisemplici.

Teorema 5.1.1 (di struttura di Wedderburn)**.** *Sia* K *un anello commutativo con unità e sia* A *una* K*-algebra semisemplice.*

(i) *Esistono numeri naturali* $n_1, n_2, ..., n_r$, $r \in \mathbb{N}$*, e algebre di divisione su* K $\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2, ..., \mathrm{D}_r$ *tali che*

$$\mathrm{A} \cong \mathrm{M}_{n_1}(\mathrm{D}_1) \times \mathrm{M}_{n_2}(\mathrm{D}_2) \times \cdots \times \mathrm{M}_{n_r}(\mathrm{D}_r), \qquad (*)$$

ossia l'algebra A *è isomorfa a un prodotto di algebre di matrici* $n_i \times n_i$ *a coefficienti in* D_i*, al variare di* $i \in \{1, 2, ..., r\}$.

(ii) *Le coppie* $(n_1, \mathrm{D}_1), (n_2, \mathrm{D}_2), ..., (n_r, \mathrm{D}_r)$ *che soddisfano* $(*)$ *sono univocamente determinate da* A *(a meno di isomorfismo e dell'ordine).*

(iii) *Al contrario, se* $n_1, n_2, ..., n_r \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$, *e se* $\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2, ..., \mathrm{D}_r$ *sono algebre di divisione su* K, *allora* $\mathrm{M}_{n_1}(\mathrm{D}_1) \times \mathrm{M}_{n_2}(\mathrm{D}_2) \times \cdots \times \mathrm{M}_{n_r}(\mathrm{D}_r)$ *è un'algebra semisemplice su* K.

Parliamo ora dell'algebra di gruppo. Per iniziare, possiamo darne la definizione in maniera più generale, partendo da un monoide G.

Definizione. *Siano* G *un monoide e* K *un anello commutativo con unità. Definiamo*

$$\mathrm{K}[\mathrm{G}] = \{\xi \in \mathrm{K}^{\mathrm{G}} : \xi \textit{ ha supporto finito}\}.$$

Definiamo l'addizione e la moltiplicazione per scalare degli elementi di K [G] *componente per componente:*

$$(a\xi + b\eta)(s) = a\xi(s) + b\eta a(s), \qquad \textit{per ogni } a, b \in \mathrm{K}, \xi, \eta \in \mathrm{K}[\mathrm{G}], s \in \mathrm{G}.$$

Definiamo la moltiplicazione in K [G] *per convoluzione:*

$$(\xi\eta)(s) = \sum_{\substack{(r,t)\in \mathrm{G}\times\mathrm{G}, \\ rt=s, \\ \xi(r)\eta(t)\neq 0}} \xi(r)\eta(t).$$

Si dimostra che K [G] è una K-algebra, detta algebra di convoluzione di G su K. Tale K-algebra è detta algebra di gruppo quando G è un gruppo. Siano inoltre $(\tau_s)_{s\in\mathrm{G}} \in \mathrm{K}[\mathrm{G}]$ definite come $\tau_s(r) = \delta_{sr}$, per ogni $s, r \in \mathrm{G}$. Dato $\xi \in \mathrm{K}[\mathrm{G}]$, si vede che

$$\xi = \sum_{\substack{s\in \mathrm{G}, \\ \xi(s)\neq 0}} \xi(s)\tau_s.$$

Tale scrittura è inoltre unica. Dunque K [G] è un modulo libero su K, con base data da $(\tau_s)_{s\in\mathrm{G}}$. È chiaro che τ_1 è l'elemento neutro di K [G]. Indicheremo τ_s semplicemente con s, quando ciò non creerà confusione. Indicheremo dunque una generica $f \in \mathrm{K}[\mathrm{G}]$ nella maniera seguente

$$f = \sum_{s\in\mathrm{G}} a_s s, \qquad \text{con } a_s \in \mathrm{K} \text{ per ogni } s \in \mathrm{G}.$$

Grazie alla definizione del prodotto di due elementi di K [G] tramite la convoluzione e alla definizione dei τ_s, si vede che il prodotto in K [G] estende quello in G.

Vediamo ora come caratterizzare le algebre di gruppo semisemplici grazie al seguente teorema.

Teorema 5.1.2 (di Maschke)**.** *Sia* G *un gruppo finito e sia* K *un campo. L'algebra di gruppo* K [G] *è semisemplice se e solo se la caratteristica di* K *non divide l'ordine di* G. *In particolare,* K [G] *è semisemplice se* K *ha caratteristica zero.*

Come conseguenza del teorema di struttura di Wedderburn (Teorema 5.1.1) e del teorema di Maschke (Teorema 5.1.2), si ha la seguente proposizione.

Proposizione 5.1.3. *Sia* K *un campo algebricamente chiuso e sia* G *un gruppo il cui ordine, finito, non divide la caratteristica di* K. *Si ha*

$$\mathrm{K}[\mathrm{G}] \cong \mathrm{M}_{n_1}(\mathrm{K}) \times \mathrm{M}_{n_2}(\mathrm{K}) \times \cdots \times \mathrm{M}_{n_r}(\mathrm{K}),$$

ossia l'algebra di gruppo K [G] *è isomorfa ad un prodotto di algebre di matrici a coefficienti in* K.

Passando ora alle rappresentazioni, vediamo come queste possano essere legate al concetto di modulo. Sia K un anello commutativo con unità e sia V un K-modulo. Sia G un gruppo finito e sia ρ una sua rappresentazione in V (è banale estendere la definizione di rappresentazione di un gruppo in uno spazio vettoriale a quella di rappresentazione di un gruppo in un K-modulo). Per ogni $s \in \mathrm{G}$ e $x \in \mathrm{V}$, si ponga $sx = \rho_s x$. Per linearità, questo definisce fx per una certa $f \in \mathrm{K}[\mathrm{G}]$ e per ogni $x \in \mathrm{V}$. V è quindi dotato di una struttura di K-modulo sinistro. Al contrario, una tale struttura definisce una rappresentazione di G in V.

5.2 Decomposizione di $\mathbb{C}[\mathrm{G}]$

Sia dunque $\mathrm{K} = \mathbb{C}$ e sia G un gruppo. Per la Proposizione 5.1.3, $\mathbb{C}[\mathrm{G}]$ è isomorfo ad un prodotto di algebre di matrici $\mathrm{M}_{n_i}(\mathbb{C})$. Più precisamente, siano $\rho^i : \mathrm{G} \to \mathbf{GL}(\mathrm{W}_i)$, per ogni $i \in \{1, 2, ..., h\}$, tutte le distinte rappresentazioni irriducibili di G (a meno di isomorfismo), e sia $n_i = \dim(\mathrm{W}_i)$, in modo tale che l'anello $\mathrm{End}(\mathrm{W}_i)$ degli endomorfismi di W_i sia isomorfo a $\mathrm{M}_{n_i}(\mathbb{C})$, per ogni $i \in \{1, 2, ..., h\}$. Estendendo la mappa ρ^i per linearità, si ottiene un omomorfismo di algebre $\tilde{\rho}^i : \mathbb{C}[\mathrm{G}] \to \mathrm{End}(\mathrm{W}_i)$. Ricordiamo che, date due algebre A e B su K, $\mathrm{F} : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ è un omomorfismo di algebre se, per ogni $k \in \mathrm{K}, x, y \in \mathrm{A}$, valgono $\mathrm{F}(kx) = k\mathrm{F}(x)$, $\mathrm{F}(x + y) = \mathrm{F}(x) + \mathrm{F}(y)$, $\mathrm{F}(xy) = \mathrm{F}(x)\mathrm{F}(y)$. La famiglia $(\tilde{\rho}^i)_{i\in\{1,2,..,h\}}$ definisce un omomorfismo

$$\tilde{\rho} : \mathbb{C}[\mathrm{G}] \to \prod_{i=1}^{i=h} \mathrm{End}(\mathrm{W}_i) \cong \prod_{i=1}^{i=h} \mathrm{M}_{n_i}(\mathbb{C}).$$

Proposizione 5.2.1. *L'omomorfismo $\tilde{\rho}$ definito in precedenza è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Per il punto (i) del Corollario 2.4.3, per quanto visto in precedenza e per l'isomorfismo tra $\mathrm{End}(\mathrm{W}_i)$ e $\mathrm{M}_{n_i}(\mathbb{C})$, per ogni $i \in \{1, 2, .., h\}$, si ha

$$\dim(\mathbb{C}[\mathrm{G}]) = g = \sum_{i=1}^{i=h} n_i^2 = \dim\Bigg(\prod_{i=1}^{i=h} \mathrm{M}_{n_i}(\mathbb{C})\Bigg).$$

Basta dunque dimostrare che $\tilde{\rho}$ è suriettivo. Per assurdo, sia $\tilde{\rho}(\mathbb{C}[\mathrm{G}])$ un sottospazio proprio di $\prod_{i=1}^{i=h} \mathrm{M}_{n_i}(\mathbb{C})$. Esiste allora un funzionale lineare $\eta : \prod_{i=1}^{i=h} \mathrm{M}_{n_i}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ non identicamente nullo che vale zero su $\tilde{\rho}(\mathbb{C}[\mathrm{G}])$. Una tale η è del tipo $\eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_h$, con $\eta_i : \mathrm{M}_{n_i}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$. Abbiamo quindi $\eta_1(\rho^1) + \eta_2(\rho^2) + \cdots + \eta_h(\rho^h) = 0$. Questa non è altro che una combinazione lineare dei coefficienti $r_{k_i j_i}$ definiti nella Sezione 2.2. Per le relazioni di ortogonalità trovate, dato che le rappresentazioni ρ^i sono mutuamente non isomorfe al variare di $i \in \{1, 2, ..., h\}$, si ha che le funzioni $r_{k_i j_i}$ sono linearmente indipendenti. Non può quindi sussistere una relazione del tipo $\eta_1(\rho^1) + \eta_2(\rho^2) + \cdots + \eta_h(\rho^h) = 0$ senza che η sia il funzionale nullo. □

Possiamo inoltre descrivere l'inverso dell'isomorfismo $\tilde{\rho}$ grazie al seguente teorema.

Teorema 5.2.2 (formula di inversione di Fourier)**.** *Sia* G *un gruppo di ordine g. Con le notazioni precedenti, sia $(u_i)_{i\in\{1,2,...h\}}$ un elemento di $\prod_{i=1}^{i=h} \mathrm{End}(\mathrm{W}_i)$, con $n_i = \dim(\mathrm{W}_i)$ per ogni $i \in \{1, 2, ...h\}$, e sia $u = \sum_{s\in\mathrm{G}} u(s)s$ l'elemento in $\mathbb{C}[\mathrm{G}]$ tale che $\tilde{\rho}^i(u) = u_i$, per ogni $i \in \{1, 2, ...h\}$. L' s-esimo coefficiente di u, $u(s)$, è dato dalla formula*

$$u(s) = \frac{1}{g} \sum_{i=1}^{i=h} n_i \mathrm{Tr}_{\mathrm{W}_i}(\rho^i(s^{-1})u_i), \qquad \textit{per ogni } s \in \mathrm{G}.$$

Dimostrazione. Per linearità, è sufficiente verificare la formula quando u coincide con un elemento t di G. Risulta $u(s) = \delta_{st}$ e

$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{W}_i}(\rho^i(s^{-1})u_i) = \mathrm{Tr}_{\mathrm{W}_i}(\rho^i(s^{-1})\tilde{\rho}^i(u)) = \mathrm{Tr}_{\mathrm{W}_i}(\rho^i(s^{-1})\tilde{\rho}^i(t)) = \mathrm{Tr}_{\mathrm{W}_i}(\rho^i(s^{-1})\rho^i(t)) = \chi_i(s^{-1}t),$$

dove χ_i è il carattere corrispondente alla rappresentazione W_i, per ogni $i \in \{1, 2, ..., h\}$. Rimane da dimostrare che

$$\delta_{st} = \frac{1}{g} \sum_{i=1}^{i=h} n_i \chi_i(s^{-1}t).$$

Ciò risulta essere una conseguenza del Corollario 2.4.2 e del Corollario 2.4.3. □

5.3 Il centro di $\mathbb{C}[\mathrm{G}]$

Sia G un gruppo e sia $\mathrm{Z}(\mathbb{C}[\mathrm{G}])$ il centro di $\mathbb{C}[\mathrm{G}]$, ossia l'insieme degli elementi di $\mathbb{C}[\mathrm{G}]$ che commutano con tutti gli elementi di $\mathbb{C}[\mathrm{G}]$ o, equivalentemente grazie alla linearità, che commutano con tutti gli elementi di G. Per ogni c classe di coniugio di G, sia $e_c = \sum_{s \in c} s$. Si verifica che e_c appartiene a $\mathrm{Z}(\mathbb{C}[\mathrm{G}])$ per ogni c, e così una loro qualsiasi combinazione lineare. Siccome le classi di coniugio formano una partizione del gruppo G, gli e_c sono linearmente indipendenti. Infine, è facile controllare che se per un elemento $u = \sum_{s \in \mathrm{G}} u(s)s \in \mathbb{C}[\mathrm{G}]$ risulta $u(r) \neq u(t)$ con t e r appartenenti alla stessa classe di coniugio, allora $u \notin \mathrm{Z}(\mathbb{C}[\mathrm{G}])$. Ciò dimostra che gli e_c formano una base di $\mathrm{Z}(\mathbb{C}[\mathrm{G}])$ al variare di c nelle classi di coniugio di G. Segue che $\dim(\mathrm{Z}(\mathbb{C}[\mathrm{G}])) = h$, con h numero delle classi di coniugio di G.

Sia ora $\rho^i : \mathrm{G} \to \mathbf{GL}(\mathrm{W}_i)$ una rappresentazione irriducibile di G di carattere χ_i e grado n_i e sia $\tilde{\rho}^i : \mathbb{C}[\mathrm{G}] \to \mathrm{End}(\mathrm{W}_i)$ il corrispondente omomorfismo di algebre definito in precedenza, per ogni $i \in \{1, 2, ...h\}$.

Proposizione 5.3.1. *Con le notazioni precedenti, l'omomorfismo $\tilde{\rho}^i$ mappa $\mathrm{Z}(\mathbb{C}[\mathrm{G}])$ nell'insieme delle omotetie di W_i e definisce un omomorfismo di algebre*

$$\omega_i : \mathrm{Z}(\mathbb{C}[\mathrm{G}]) \to \mathbb{C}.$$

Se $u = \sum_{s \in \mathrm{G}} u(s)s$ è un elemento di $\mathrm{Z}(\mathbb{C}[\mathrm{G}])$, si ha

$$\omega_i(u) = \frac{1}{n_i} \mathrm{Tr}_{\mathrm{W}_i}(\tilde{\rho}^i(u)) = \frac{1}{n_i} \sum_{s \in \mathrm{G}} u(s)\chi_i(s).$$

Dimostrazione. Questa è una riformulazione della Proposizione 2.5.1. In particolare, ω_i associa a un elemento u di $\mathrm{Z}(\mathbb{C}[\mathrm{G}])$ il rapporto dell'omotetia $\tilde{\rho}^i(u)$. □

Proposizione 5.3.2. *Con riferimento alla* Proposizione 5.3.1*, la famiglia $(\omega_i)_{i \in \{1,2,...,h\}}$ definisce un isomorfismo tra $\mathrm{Z}(\mathbb{C}[\mathrm{G}])$ e l'algebra $\mathbb{C}^h = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}$.*

Dimostrazione. Identifichiamo $\mathbb{C}[\mathrm{G}]$ con il prodotto di algebre $\mathrm{End}(\mathrm{W}_i)$. $\mathrm{Z}(\mathbb{C}[\mathrm{G}])$ diventa il prodotto dei centri di $\mathrm{End}(\mathrm{W}_i)$. In particolare $\mathrm{Z}(\mathrm{End}(\mathrm{W}_i))$ consiste nelle omotetie $n_i \times n_i$, per ogni $i \in \{1, 2, .., h\}$. Abbiamo quindi un isomorfismo tra il prodotto dei centri di $\mathrm{End}(\mathrm{W}_i)$ e l'algebra $\mathbb{C}^h$: quello che associa ad un prodotto di omotetie la h-upla dei loro rapporti. Esattamente l'omomorfismo descritto dalla famiglia $(\omega_i)_{i \in \{1,2,...,h\}}$. □

5.4 Proprietà elementari degli interi

Vedremo alcune definizioni e proposizioni propedeutiche alla sezione successiva, incentrata su alcune proprietà dei caratteri.

Definizione. *Sia* R *un anello commutativo e sia $x \in \mathrm{R}$. Diremo che x è intero su $\mathbb{Z}$ se esistono un certo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e degli elementi $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{Z}$ tali che*

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0.$$

Definizione. *Un numero complesso che sia intero su $\mathbb{Z}$ è detto intero algebrico.*

Si verifica facilmente che se $x \in \mathbb{Q}$ è un intero algebrico, allora $x \in \mathbb{Z}$.

Proposizione 5.4.1. *Sia x un elemento dell'anello commutativo* R. *Le seguenti proprietà sono equivalenti.*

(i) *x è intero su $\mathbb{Z}$.*

(ii) *Il sottoanello $\mathbb{Z}[x]$ di* R *generato da x è finitamente generato come $\mathbb{Z}$-modulo.*

(iii) *Esiste un sotto-$\mathbb{Z}$-modulo finitamente generato di* R *che contiene $\mathbb{Z}[x]$.*

Ricordiamo che, dato R un anello commutativo, un R-modulo M viene detto finitamente generato se esistono $m_1, m_2, ..., m_k \in \mathrm{M}$, $k \in \mathbb{N}$, tale che per ogni $m \in \mathrm{M}$ esistono $r_1, r_2, ..., r_k \in \mathrm{R}$ che realizzano $m = r_1m_1 + r_2m_2 + \cdots + r_km_k$.

Corollario 5.4.2. *Se* R *è uno $\mathbb{Z}$-modulo finitamente generato, ogni elemento di* R *è intero su $\mathbb{Z}$.*

Corollario 5.4.3. *Gli elementi di* R *che sono interi su $\mathbb{Z}$ formano un sottoanello di* R.

5.5 Proprietà integrali dei caratteri, applicazioni

Come anticipato, vediamo alcune ulteriori proprietà dei caratteri riguardanti quanto visto nella sezione precedente. Dimostreremo alcuni risultati riguardanti gli elementi di $\mathrm{Z}(\mathbb{C}[\mathrm{G}])$ e il grado delle rappresentazioni irriducibili di un gruppo G.

Proposizione 5.5.1. *Sia χ il carattere di una rappresentazione ρ di un gruppo* G. *Si ha che $\chi(s)$ è un intero algebrico per ogni $s \in \mathrm{G}$.*

Dimostrazione. Infatti, $\chi(s)$ è la traccia di $\rho(s)$, ossia la somma dei suoi autovalori, che sono radici dell'unità, e quindi interi algebrici. La somma di interi algebrici è ancora un intero algebrico. □

Proposizione 5.5.2. *Siano* G *un gruppo e $u = \sum_{s\in \mathrm{G}} u(s)s$ un elemento di* $\mathrm{Z}(\mathbb{C}[\mathrm{G}])$ (che è un anello commutativo) *tale che $u(s)$ è un intero algebrico per ogni $s \in \mathrm{G}$. Allora u è intero su $\mathbb{Z}$.*

Dimostrazione. Siano $(c_i)_{i\in\{1,2,...,h\}}$ le classi di coniugio di G e sia $e_i = \sum_{s\in c_i} s$, per ogni $i \in \{1, 2, ..., h\}$. Per quanto visto nella Sezione 5.3, per ogni $u = \sum_{s\in \mathrm{G}} u(s)s \in \mathrm{Z}(\mathbb{C}[\mathrm{G}])$ possiamo scrivere

$$u = \sum_{i=1}^{i=h} u(s_i)e_i,$$

per un qualsiasi $s_i \in c_i$, per ogni $i \in \{1, 2, ..., h\}$. Grazie al Corollario 5.4.3, è sufficiente mostrare che e_i è intero su $\mathbb{Z}$ per ogni $i \in \{1, 2, ..., h\}$. Ciò è chiaro. Infatti, si ha che e_je_k è una certa combinazione lineare a coefficienti interi degli e_i, per ogni $j, k \in \{1, 2, ..., h\}$ (questo perché e_je_k appartiene a $\mathrm{Z}(\mathbb{C}[\mathrm{G}])$ e gli $(e_i)_{i\in\{1,2,...,h\}}$ formano una base di $\mathrm{Z}(\mathbb{C}[\mathrm{G}])$. Il sottogruppo

$$\mathrm{R} = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_h$$

di $\mathrm{Z}(\mathbb{C}[\mathrm{G}])$ è dunque un sottoanello, in particolare finitamente generato. Dal Corollario 5.4.2 segue quindi la tesi. □

Corollario 5.5.3. *Sia* G *un gruppo. Sia inoltre ρ una rappresentazione irriducibile di* G *di grado n e di carattere χ. Se u è come nella* Proposizione 5.5.2, *si ha che il numero complesso $(1/n)\sum_{s\in \mathrm{G}} u(s)\chi(s)$ è un intero algebrico.*

Dimostrazione. Questo numero è infatti l'immagine di u attraverso l'omomorfismo ω associato a ρ (si veda la Proposizione 5.3.1). Siccome u è intero su $\mathbb{Z}$, per definizione di omomorfismo di algebre anche $\omega(u)$ è intero su $\mathbb{Z}$. Siccome $\omega(u)$ è intero su $\mathbb{Z}$ e appartiene a $\mathbb{C}$, $(1/n)\sum_{s\in \mathrm{G}} u(s)\chi(s)$ è un intero algebrico. □

Corollario 5.5.4. *Sia* G *un gruppo. I gradi delle rappresentazioni irriducibili di* G *dividono l'ordine di* G.

Dimostrazione. Sia g l'ordine di G e sia ρ una rappresentazione irriducibile di G di grado n e carattere χ. Applichiamo il Corollario 5.5.3 all'elemento $u = \sum_{s\in \mathrm{G}} \chi(s^{-1})s$. Ciò è legittimo, in quanto χ è una funzione di classe su G e, per la Proposizione 5.5.1, $\chi(s)$ è un intero algebrico per ogni $s \in \mathrm{G}$. Si ottiene che il numero complesso

$$\frac{1}{n}\sum_{s\in \mathrm{G}} \chi(s^{-1})\chi(s) = \frac{g}{n}\langle \chi, \chi\rangle = \frac{g}{n}$$

è un intero algebrico. Sicome $g/n \in \mathbb{Q}$ e g/n è un intero algebrico, si ha $g/n \in \mathbb{Z}$, ossia il grado della rappresentazione irriducibile ρ divide l'ordine di G, questo per ogni rappresentazione irriducibile ρ di G. □

Possiamo dare una versione più forte del Corollario 5.5.4.

Proposizione 5.5.5. *Sia* G *un gruppo e sia* $\mathrm{C} = \mathrm{Z}(\mathrm{G})$ *il centro di* G. *I gradi delle rappresentazioni irriducibili di* G *dividono* $[\mathrm{G} : \mathrm{C}]$.

Dimostrazione. Sia g l'ordine di G e sia c quello di C. Sia inoltre $\rho : \mathrm{G} \to \mathbf{GL}(\mathrm{W})$ una rappresentazione irriducibile di G di grado n. Sia $s \in \mathrm{C}$: $\rho(s)$ commuta con $\rho(t)$ per ogni $t \in \mathrm{G}$. Per il lemma di Schur (Proposizione 2.2.1), $\rho(s)$ è un'omotetia, per ogni $s \in \mathrm{C}$. Se denotiamo con $\lambda(s)$ il suo rapporto, la mappa $\lambda : s \mapsto \lambda(s)$ è un omomorfismo da C a $\mathbb{C}^*$. Sia $m \in \mathbb{N}$ e si costruisca il prodotto tensoriale

$$\rho^m : \mathrm{G}^m = \mathrm{G}\times \mathrm{G}\times\cdots\times \mathrm{G} \to \mathbf{GL}(\mathrm{W}\otimes \mathrm{W}\otimes\cdots\otimes \mathrm{W})$$

di m copie di ρ. Per il Teorema 3.2.1, questa è una rappresentazione irriducibile di G^m. L'mmagine attraverso ρ^m di un elemento $(s_1, s_2, ..., s_m)$ di C^m è un'omotetia di rapporto $\lambda(s_1 \cdot s_2 \cdots s_m)$. Sia H il sottogruppo di C^m formato dagli elementi $(s_1, s_2, ..., s_m)$ tali che $s_1 \cdot s_2 \cdots s_m = 1$. H ha chiaramente ordine c^{m-1}. Inoltre, H ha come immagini attraverso ρ^m omotetie di rapporto 1, agisce quindi in maniera banale su $\mathrm{W}\otimes\mathrm{W}\otimes\cdots\otimes\mathrm{W}$. Passando al quoziente, otteniamo una rappresentazione irriducibile di G^m/H. Per il Corollario 5.5.4, si ha che il grado n^m di ρ^m divide l'ordine g^m/c^{m-1} di G^m/H. Si ha dunque che $(g/cn)^m \in c^{-1}\mathbb{Z}$, per ogni $m \in \mathbb{N}$. Per la Proposizione 5.4.1, in particolare (ii) $\Rightarrow$ (i), (g/cn) è intero su $\mathbb{Z}$. Siccome $(g/cn) \in \mathbb{Q}$, segue la tesi. □

Capitolo 6

Rappresentazioni indotte, criterio di Mackey

6.1 Induzione

Precisazioni sul prodotto tensoriale

Definizione. *Siano* A *un anello,* M *un* A*-modulo destro,* N *un* A*-modulo sinistro e* P *un gruppo abeliano. Una mappa* $\phi : \mathrm{M} \times \mathrm{N} \to \mathrm{P}$ *è detta* A*-bilanciata se*

$$\phi(m, n + n') = \phi(m, n) + \phi(m, n'), \qquad \phi(m + m', n) = \phi(m, n) + \phi(m', n) \qquad \phi(mx, n) = \phi(m, xn),$$

per ogni $m, m' \in \mathrm{M}, n, n' \in \mathrm{N}, x \in \mathrm{A}$.

Definizione. *Con le notazioni della definizione precedente, il prodotto tensoriale su* A *tra* M *e* N *è un gruppo abeliano dotato di una mappa bilineare* A*-bilanciata* $\otimes_\mathrm{A} : \mathrm{M} \times \mathrm{N} \to \mathrm{M} \otimes_\mathrm{A} \mathrm{N}$ *denotata da* $(m, n) \longmapsto m \otimes n$ *tale che valga la seguente proprietà:*

> *dato* P *un gruppo abeliano e* $\varphi : \mathrm{M} \times \mathrm{N} \to \mathrm{P}$ *una mappa* A*-bilanciata, allora esiste un unico omomorfismo di gruppi* $\Phi : \mathrm{M} \otimes_\mathrm{A} \mathrm{N} \to \mathrm{P}$ *tale che* $\varphi(m, n) = \Phi(m \otimes n)$ *per ogni* $m \in \mathrm{M}$, $n \in \mathrm{N}$.

Si dimostra che il prodotto tensoriale così definito esiste ed è unico a meno di isomorfismo.

Siano ora R un anello commutativo e A una R-algebra. Siano inoltre M un A-modulo destro e N un A-modulo sinistro. Si dimostra che $\mathrm{M} \otimes_\mathrm{A} \mathrm{N}$ è un R-modulo.

Sia inoltre B un altro anello. Se M è un (B,A)-bimodulo, cioè M è un B-modulo sinistro e un A-modulo destro (tale che $(bx)a = b(xa)$ per ogni $b \in \mathrm{B}, a \in \mathrm{A}, x \in \mathrm{M}$), allora si dimostra che $\mathrm{M} \otimes_\mathrm{A} \mathrm{N}$ è un B-modulo sinistro, con $b(x \otimes y) = (bx) \otimes y$ per ogni $b \in \mathrm{B}, x \in \mathrm{M}, y \in \mathrm{N}$.

In particolare, se A è commutativa, allora M A-modulo destro è un (A,A)-bimodulo con $ax := xa$, per ogni $a \in \mathrm{A}, x \in \mathrm{M}$, e quindi $\mathrm{M} \otimes_\mathrm{A} \mathrm{N}$ è un A-modulo (sinistro), che si dimostra essere isomorfo a quello già definito nella Sezione 1.4.

Se $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ è un omomorfismo di anelli e M è un A-modulo sinistro, si può vedere B come un (B,A)-bimodulo, con $b \cdot x$ che coincide con il prodotto in B, per ogni $b, x \in \mathrm{B}$, e con $x \cdot a = x \cdot f(a)$ in B, per ogni $a \in \mathrm{A}, x \in \mathrm{B}$.
$\mathrm{B} \otimes_\mathrm{A} \mathrm{M}$ è quindi un B-modulo sinistro, che si dice ottenuto da M per estensione degli scalari tramite f.

Siano ora G un gruppo, H un suo sottogruppo e R un insieme di rappresentanti di G/H. Siano V un $\mathbb{C}[\mathrm{G}]$-modulo sinistro e W un sotto-$\mathbb{C}[\mathrm{H}]$-modulo di V. Ricordiamo che il modulo V (o la rappresentazione V, grazie all'anologia vista nella Sezione 5.1) è detto indotto da W se risulta $\mathrm{V} = \oplus_{s\in \mathrm{R}} s\mathrm{W}$. Possiamo riformulare questa proprietà nel modo seguente. Sia

$$\mathrm{W}' = \mathbb{C}[\mathrm{G}] \otimes_{\mathbb{C}[\mathrm{H}]} \mathrm{W}$$

il $\mathbb{C}[\mathrm{G}]$-modulo ottenuto da W attraverso l'estensione degli scalari da $\mathbb{C}[\mathrm{H}]$ a $\mathbb{C}[\mathrm{G}]$. L'immersione $\mathrm{W} \hookrightarrow \mathrm{V}$ si estende per linearità a un $\mathbb{C}[\mathrm{G}]$-omomorfismo $i : \mathrm{W}' \to \mathrm{V}$.

Proposizione 6.1.1. *Con le notazioni precedenti, affinché* V *sia indotto da* W *è necessario e sufficiente che l'omomorfismo*

$$i : \mathbb{C}[\mathrm{G}] \otimes_{\mathbb{C}[\mathrm{H}]} \mathrm{W} \to \mathrm{V}$$

sia un isomorfismo.

Dimostrazione. Questo è conseguenza del fatto che, in quanto insieme di rappresentanti di G/H, R costituisce una base per $\mathbb{C}[\mathrm{G}]$ visto come $\mathbb{C}[\mathrm{H}]$-modulo destro. □

Grazie alla Proposizione 6.1.1 e alle proprietà del prodotto tensoriale, otteniamo un'altra dimostrazione di esistenza e unicità della rappresentazione indotta da W (si veda la Sezione 3.3). Tale rappresentazione sarà indicata d'ora in avanti con $\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{W})$ o semplicemente con Ind(W) se ciò non creerà confusione.
Una proprietà interessante che può essere dimostrata direttamente o usando l'associatività del prodotto tensoriale è la transitività dell'induzione: con le notazioni precedenti, se G è inoltre un sottogruppo di un certo gruppo L, si ha

$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{L}}(\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{W})) \cong \mathrm{Ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{L}}(\mathrm{W}).$$

Vediamo infine una proposizione.

Proposizione 6.1.2. *Sia* G *un gruppo e sia* V *un* $\mathbb{C}[\mathrm{G}]$*-modulo tale che* $\mathrm{V} = \oplus_{i\in\mathbb{J}} \mathrm{W}_i$ *sia somma diretta di spazi vettoriali permutati transitivamente da* G*, con* $\mathbb{J}$ *insieme finito di indici. Siano inoltre* $i_0 \in \mathbb{J}$*,* $\mathrm{W} = \mathrm{W}_{i_0}$ *e sia* H *lo stabilizzatore di* W *in* G (cioè l'insieme degli elementi $s \in \mathrm{G}$ tali che $s\mathrm{W} = \mathrm{W}$). *Allora* W *è stabile sotto l'azione del sottogruppo* H *e il* $\mathbb{C}[\mathrm{G}]$*-modulo* V *è indotto dal* $\mathbb{C}[\mathrm{H}]$*-modulo* W*.*

Dimostrazione. Ricordando la definizione di rappresentazione indotta, la proposizione risulta essere chiara. □

Osservazione: se V è una rappresentazione irriducibile, la condizione di transitività è automaticamente verificata perché ogni orbita di G definisce una sottorappresentazione.

Esempio: con riferimento alla Proposizione 6.1.2, se ogni W_i ha dimensione 1, la rappresentazione V è detta monomiale.

6.2 Il carattere di una rappresentazione indotta, la formula di reciprocità

Definiamo per prima cosa il concetto di funzione indotta.

Definizione. *Sia* G *un gruppo,* H *un suo sottogruppo di ordine* h *e* f *una funzione di classe su* H*. Definiamo la funzione* $f' : \mathrm{G} \to \mathbb{C}$ *come segue*

$$f'(s) = \frac{1}{h} \sum_{\substack{t\in\mathrm{G},\\ t^{-1}st\in\mathrm{H}}} f(t^{-1}st), \qquad \textit{per ogni } s \in \mathrm{G}.$$

Diremo che la funzione f' è indotta da f e la indicheremo con $\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(f)$ *o semplicemente con* $\mathrm{Ind}(f)$*.*

Vediamo ora un primo risultato.

Proposizione 6.2.1. *Siano* G*,* H *ed* f *come nella definizione precedente.*

(i) *La funzione* $\mathrm{Ind}(f)$ *è una funzione di classe su* G*.*

(ii) *Se* f *è il carattere di una rappresentazione* W *di* H*,* $\mathrm{Ind}(f)$ *è il carattere della rappresentazione indotta* Ind(W) *di* G*.*

Dimostrazione. Per prima cosa, notiamo che (ii) implica (i) poiché ogni funzione di classe è combinazione lineare di caratteri irriducibili (Teorema 2.5.2). Infine, (ii) è una riformulazione del Teorema 3.3.3. □

Ricordando la definizione dell'operatore $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^{\mathrm{G}} \times \mathbb{C}^{\mathrm{G}} \to \mathbb{C}$ data nella Sezione 2.2, indicheremo ora con maggiore precisione quello stesso operatore con $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{G}} : \mathbb{C}^{\mathrm{G}} \times \mathbb{C}^{\mathrm{G}} \to \mathbb{C}$. Vediamo l'analogo di questo operatore per i $\mathbb{C}[\mathrm{G}]$-moduli.

Definizione. *Sia* G *un gruppo e sia* $\mathrm{Mod}_{\mathbb{C}[\mathrm{G}]} = \{\mathrm{V} \mid \mathrm{V} \text{ è un } \mathbb{C}[\mathrm{G}]\text{-modulo}\}$*. Definiamo l'operatore*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{G}} : \mathrm{Mod}_{\mathbb{C}[\mathrm{G}]} \times \mathrm{Mod}_{\mathbb{C}[\mathrm{G}]} \to \mathbb{N}$$

come segue

$$\langle \mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2 \rangle_{\mathrm{G}} = \dim(\mathrm{Hom}^{\mathrm{G}}(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2)), \qquad \textit{per ogni } \mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2 \in \mathrm{Mod}_{\mathbb{C}[\mathrm{G}]},$$

dove indichiamo con $\mathrm{Hom}^{\mathrm{G}}(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2)$ *lo spazio vettoriale dei* $\mathbb{C}[\mathrm{G}]$*-omomorfismi di* V_1 *in* V_2*.*

Lemma 6.2.2. *Sia* G *un gruppo. Se* ϕ^1 *e* ϕ^2 *sono i caratteri di due rappresentazioni* V_1 *e* V_2 *di* G*, si ha*

$$\left\langle \phi^1, \phi^2 \right\rangle_{\mathrm{G}} = \langle \mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2 \rangle_{\mathrm{G}}.$$

Dimostrazione. Possiamo supporre ϕ^1 e ϕ^2 caratteri irriducibili. Ci si può sempre ricondurre a questo caso grazie ad una decomposizione in rappresentazioni irriducibili. Il lemma diventa quindi una conseguenza del Teorema 2.3.1. □

Siano G un gruppo, H un suo sottogruppo, φ una funzione su G e V una rappresentazione di G. Indicheremo con $\mathrm{Res}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(\varphi)$ o semplicemente con $\mathrm{Res}(\varphi)$ la restrizione di φ ad H. Inoltre, indicheremo con $\mathrm{Res}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{V})$ o semplicemente con Res(V) la restrizione di V ad H.

Teorema 6.2.3 (formula di reciprocità di Frobenius)**.** *Siano* G *un gruppo e* H *un suo sottogruppo. Se* ψ *è una funzione di classe su* H *e* φ *è una funzione di classe su* G*, si ha*

$$\langle \psi, \mathrm{Res}(\varphi) \rangle_{\mathrm{H}} = \langle \mathrm{Ind}(\psi), \varphi \rangle_{\mathrm{G}}.$$

Dimostrazione. Siccome ogni funzione di classe è combinazione lineare di caratteri irriducibili, possiamo supporre che ψ sia il carattere di un $\mathbb{C}[\mathrm{H}]$-modulo W e che φ sia il carattere di un $\mathbb{C}[\mathrm{G}]$-modulo E. Grazie al Lemma 6.2.2, è sufficiente dimostrare che

$$\langle \mathrm{W}, \mathrm{Res}(\mathrm{E}) \rangle_{\mathrm{H}} = \langle \mathrm{Ind}(\mathrm{W}), \mathrm{E} \rangle_{\mathrm{G}}, \tag{$*$}$$

ossia

$$\dim(\mathrm{Hom}^{\mathrm{H}}(\mathrm{W}, \mathrm{Res}(\mathrm{E}))) = \dim(\mathrm{Hom}^{\mathrm{G}}(\mathrm{Ind}(\mathrm{W}), \mathrm{E})).$$

Questo deriva dal fatto che, per la Proposizione 6.1.1, esiste un isomorfismo canonico tra $\mathrm{Hom}^{\mathrm{H}}(\mathrm{W}, \mathrm{D})$ e $\mathrm{Hom}^{\mathrm{G}}(\mathrm{Ind}(\mathrm{W}), \mathrm{D})$, per qualsiasi rappresentazione W e qualsiasi $\mathbb{C}[\mathrm{G}]$-modulo D. Tutto ciò può anche essere visto grazie al Lemma 3.3.1. Inoltre, tale teorema può anche essere dimostrato tramite calcolo diretto. □

Osservazione: dal Teorema 6.2.3, segue che Res è l'operatore aggiunto di Ind per $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (e che quindi Ind è l'operatore aggiunto di Res per $\langle \cdot, \cdot \rangle$).

Osservazione: ricordando l'operatore $(\cdot \mid \cdot) : \mathbb{C}^{\mathrm{G}} \times \mathbb{C}^{\mathrm{G}} \to \mathbb{C}$ definito nella Sezione 2.3, con gli stessi conti e lo stesso cambio di notazione si ottiene

$$(\psi \mid \mathrm{Res}(\varphi))_{\mathrm{H}} = (\mathrm{Ind}(\psi) \mid \varphi)_{\mathrm{G}} .$$

Osservazione: tramite calcolo diretto o dalla formula $\mathrm{Ind}(\mathrm{W}) \otimes \mathrm{E} = \mathrm{Ind}(\mathrm{W} \otimes \mathrm{Res}(\mathrm{E}))$ (si veda l'esempio 5 della Sezione 3.3) si ottiene

$$\mathrm{Ind}(\psi \cdot \mathrm{Res}(\varphi)) = (\mathrm{Ind}(\psi)) \cdot \varphi.$$

Proposizione 6.2.4. *Siano* G *un gruppo e* H *un suo sottogruppo. Siano inoltre* W *una rappresentazione irriducibile di* H *e* E *una rappresentazione irriducibile di* G*. Il numero di volte in cui* W *è contenuto in* Res(E) *è uguale al numero di volte in cui* E *è contenuto in* Ind(W)*.*

Dimostrazione. Basta applicare il Teorema 6.2.3 con ψ carattere di W e φ carattere di E. La tesi segue ad esempio da $(*)$. □

6.3 Restrizione a sottogruppi

Sia G un gruppo e siano H e K due suoi sottoguppi. Siano inoltre $\rho : \mathrm{H} \to \mathbf{GL}(\mathrm{W})$ una rappresentazione di H e $\mathrm{V} = \mathrm{Ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{W})$ la corrispondente rappresentazione di G indotta da W. Vorremmo determinare la rappresentazione $\mathrm{Res}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{V})$ di K. Per prima cosa, sia S un insieme di rappresentanti della doppia classe laterale (K,H) di G, ciò significa che G è l'unione disgiunta degli insiemi $\mathrm{K}s\mathrm{H}$ al variare di $s \in \mathrm{S}$. Useremo anche la notazione $s \in \mathrm{K}\backslash\mathrm{G}/\mathrm{H}$. Per ogni $s \in \mathrm{S}$, definiamo $\mathrm{H}_s = s\mathrm{H}s^{-1} \cap \mathrm{K}$. Si verifica facilmente che H_s è un sottogruppo di K per ogni $s \in \mathrm{S}$. Sia ora

$$\rho^s(x) = \rho(s^{-1}xs), \qquad \text{per ogni } x \in \mathrm{H}_s,$$

per ogni $s \in \mathrm{S}$. Abbiamo dunque ottenuto, per ogni $s \in \mathrm{S}$, un omomorfismo $\rho^s : \mathrm{H}_s \to \mathbf{GL}(\mathrm{W})$, ossia una rappresentazione di H_s, che indicheremo con W_s. Siccome H_s è un sottogruppo di K, è definita la rappresentazione indotta $\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}_s}^{\mathrm{K}}(\mathrm{W}_s)$, questo per ogni $s \in \mathrm{S}$. Vediamo come costruire la rappresentazione di K cercata a partire dalle rappresentazioni $\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}_s}^{\mathrm{K}}(\mathrm{W}_s)$.

Proposizione 6.3.1. *Sia* G *un gruppo e siano* H *e* K *due suoi sottogruppi. Sia inoltre* W *una rappresentazione di* H*. Con le notazioni precedenti, la rappresentazione* $\mathrm{Res}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{W}))$ *è isomorfa a alla somma diretta delle rappresentazioni* $\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}_s}^{\mathrm{K}}(\mathrm{W}_s)$ *al variare di* $s \in \mathrm{S} = \mathrm{K}\backslash\mathrm{G}/\mathrm{H}$*.*

Dimostrazione. Sappiamo che V è la somma diretta delle immagini $y\mathrm{W}$, al variare di $y \in \mathrm{G}/\mathrm{H}$. Per ogni $s \in \mathrm{S}$, sia $\mathrm{V}(s)$ il sottospazio di V generato dalle immagini $x\mathrm{W}$, al variare di $x \in \mathrm{K}s\mathrm{H}$. V risulta essere la somma diretta dei $\mathrm{V}(s)$ al variare di $s \in \mathrm{S}$; inoltre $\mathrm{V}(s)$ è stabile sotto l'azione di K per ogni $s \in \mathrm{S}$. Rimane da provare che $\mathrm{V}(s)$ è K-isomorfo a $\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}_s}^{\mathrm{K}}(\mathrm{W}_s)$, per ogni $s \in \mathrm{S}$. Sia $s \in \mathrm{S}$; il sottogruppo di K formato dagli elementi z tali che $z(s\mathrm{W}) = s\mathrm{W}$ coincide con H_s, e $\mathrm{V}(s)$ è somma diretta delle immagini $w(s\mathrm{W})$ al variare di $w \in \mathrm{K}/\mathrm{H}_s$. Si ha quindi che $\mathrm{V}(s) = \mathrm{Ind}_{\mathrm{H}_s}^{\mathrm{K}}(s\mathrm{W})$. Resta da controllare che $s\mathrm{W}$ è H_s-isomorfo a W_s. L'isomorfismo è dato da $s : \mathrm{W}_s \to s\mathrm{W}$. E ciò vale per ogni $s \in \mathrm{S}$. □

Osservazione: siccome $\mathrm{V}(s)$ dipende unicamente dall'immagine di s in $\mathrm{K}\backslash\mathrm{G}/\mathrm{H}$, si ha che la rappresentazione $\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}_s}^{\mathrm{K}}(\mathrm{W}_s)$ dipende (a meno di isomorfismo) unicamente dalla doppia classe laterale di s.

6.4 Criterio di irriducibilità di Mackey

Siano ora G un gruppo e H un suo sottogruppo. Siano inoltre $\rho : \mathrm{H} \to \mathbf{GL}(\mathrm{W})$ una rappresentazione di H e $\mathrm{V} = \mathrm{Ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{W})$ la corrispondente rappresentazione di G indotta da W. Per ogni $s \in \mathrm{G}$, indichiamo con H_s il sottogruppo $s\mathrm{H}s^{-1} \cap \mathrm{H}$ di H. La rappresentazione ρ definisce ora una famiglia di rappresentazioni $\mathrm{Res}_{\mathrm{H}_s}^{\mathrm{H}}(\rho)$ tramite restrizione di ρ a H_s, al variare di $s \in \mathrm{G}$. Sia ora $\mathrm{K} = \mathrm{H}$ e si definisca la rappresentazione ρ^s come nella sezione precedente, per ogni $s \in \mathrm{G}$.

Definizione. *Sia* G *un gruppo e siano* V_1 *e* V_2 *due rappresentazioni di* G. V_1 *e* V_2 *sono dette disgiunte se non hanno componenti irriducibili in comune, il che significa* $\langle \mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2 \rangle_{\mathrm{G}} = 0$.

Vediamo ora un importante criterio di irriducibilità che riguarda le rappresentazioni indotte.

Proposizione 6.4.1 (criterio di irriducibilità di Mackey)**.** *Con le notazioni precedenti, affinché la rappresentazione* $\mathrm{V} = \mathrm{Ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{W})$ *sia irriducibile è necessario e sufficiente che siano verificate le seguenti condizioni:*

(i) W *è irriducibile,*

(ii) *per ogni* $s \in \mathrm{G} - \mathrm{H}$*, le due rappresentazioni* ρ^s *e* $\mathrm{Res}_{\mathrm{H}_s}^{\mathrm{H}}(\rho)$ *di* H_s *sono disgiunte.*

Dimostrazione. Affinché la rappresentazione V sia irriducibile è necessario e sufficiente che $\langle \mathrm{V}, \mathrm{V} \rangle_{\mathrm{G}} = 1$. Per la formula di reciprocità di Frobenius (Teorema 6.2.3), si ha

$$\langle \mathrm{V}, \mathrm{V} \rangle_{\mathrm{G}} = \left\langle \mathrm{W}, \mathrm{Res}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{V}) \right\rangle_{\mathrm{H}}.$$

Per la Proposizione 6.3.1, risulta

$$\mathrm{Res}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{V}) = \bigoplus_{s \in \mathrm{H}\backslash\mathrm{G}/\mathrm{H}} \mathrm{Ind}_{\mathrm{H}_s}^{\mathrm{H}}(\rho^s).$$

Applicando nuovamente la formula di reciprocità di Frobenius (Teorema 6.2.3) e ponendo

$$d_s = \left\langle \mathrm{Res}_{\mathrm{H}_s}^{\mathrm{H}}(\rho), \rho^s \right\rangle_{\mathrm{H}_s}$$

per ogni $s \in \mathrm{H}\backslash\mathrm{G}/\mathrm{H}$, si ha

$$\langle \mathrm{V}, \mathrm{V} \rangle_{\mathrm{G}} = \sum_{s \in \mathrm{H}\backslash\mathrm{G}/\mathrm{H}} d_s.$$

In particolare, $d_1 = \langle \rho, \rho \rangle \geq 1$. Affinché $\langle \mathrm{V}, \mathrm{V} \rangle_{\mathrm{G}} = 1$, è necessario e sufficiente che $d_1 = 1$ e che $d_s = 0$ per ogni $s \in \mathrm{H}\backslash\mathrm{G}/\mathrm{H}, s \neq 1$, il che equivale alle condizioni (i) e (ii). □

Corollario 6.4.2. *Con le notazioni del criterio di irriducibilità di Mackey* (Proposizione 6.4.1)*, sia* H *un sottogruppo normale. Affinché la rappresentazione* $\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{W})$ *sia irriducibile è necessario e sufficiente che* ρ *sia irriducibile e che non sia isomorfa a nessuna delle sue coniugate* ρ^s*, per ogni* $s \in \mathrm{G} - \mathrm{H}$.

Dimostrazione. Infatti, siccome H è normale, si ha $\mathrm{H}_s = \mathrm{H}$ e di conseguenza $\mathrm{Res}_{\mathrm{H}_s}^{\mathrm{H}}(\rho) = \rho$, per ogni $s \in \mathrm{G}$. □

Capitolo 7

Applicazioni

7.1 Sottogruppi normali

Definizione. *Una rappresentazione è detta isotipica se è somma diretta di rappresentazioni irriducibili isomorfe.*

Proposizione 7.1.1. *Siano* G *un gruppo e* A *un suo sottogruppo normale. Sia inoltre* $\rho : \mathrm{G} \to \mathbf{GL}(\mathrm{V})$ *una rappresentazione irriducibile di* G *in uno spazio vettoriale* V*. Allora:*

(1) *o esistono un sottogruppo proprio* H *di* G *che contiene* A *e una rappresentazione* σ *di* H *tale che* ρ *sia indotta da* σ*;*

(2) *o la restrizione di* ρ *a* A *è isotipica.*

Dimostrazione. Sia ρ^{A} la restrizione di ρ ad A. Sia inoltre $\mathrm{V} = \oplus_{i \in \mathbb{J}} \mathrm{V}_i$ la decomposizione canonica della rappresentazione ρ^{A} in una somma diretta di rappresentazioni isotipiche, con $\mathbb{J}$ insieme finito di indici. Sia $i_0 \in \mathbb{J}$. Se V_{i_0} è uguale a V, siamo nel caso (2). In caso contrario, sia H il sottogruppo di G formato dagli elementi $h \in \mathrm{G}$ tali che $\rho(h)\mathrm{V}_{i_0} = \mathrm{V}_{i_0}$. Siccome V è una rappresentazione irriducibile, $\rho(s)$ permuta i V_i transitivamene al variare di $s \in \mathrm{G}$. Si ha dunque che $\mathrm{H} \neq \mathrm{G}$. Inoltre, $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{H}$. Infine, ρ è indotta dalla rappresentazione σ di H in V_{i_0} data dalla restrizione di ρ ad H, il che equivale al caso (1). □

Osservazione: se il sottogruppo A è abeliano, (2) è equivalente a dire che $\rho(a)$ è un'omotetia per ogni $a \in \mathrm{A}$.

Corollario 7.1.2. *Sia* G *un gruppo e sia* A *un sottogruppo normale abeliano di* G*. Il grado di ogni rappresentazione irriducibile* ρ *di* G *divide l'indice* $[\mathrm{G} : \mathrm{A}]$ *di* A *in* G*.*

Dimostrazione. La dimostrazione è ottenuta per induzione sull'ordine di G. Il passo base è banale. Distinguiamo gli unici due casi possibili descritti dalla Proposizione 7.1.1.

(1) Per ipotesi induttiva e con le notazioni della Proposizione 7.1.1, si ha che il grado di σ divide $[\mathrm{H} : \mathrm{A}]$. Moltiplicando questa relazione per $[\mathrm{G} : \mathrm{H}]$, si ottiene che il grado di ρ divide $[\mathrm{G} : \mathrm{A}]$.

(2) Sia $\mathrm{G}' = \rho(\mathrm{G})$ e $\mathrm{A}' = \rho(\mathrm{A})$. Siccome la mappa canonica $\mathrm{G}/\mathrm{A} \to \mathrm{G}'/\mathrm{A}'$ è suriettiva, si ha che $[\mathrm{G}' : \mathrm{A}']$ divide $[\mathrm{G} : \mathrm{A}]$. Per l'osservazione precedente, gli elementi di A' sono omotetie, contenute quindi nel centro di G'. Dalla Proposizione 5.5.5, segue che il grado di ρ divide $[\mathrm{G}' : \mathrm{A}']$ e quindi divide anche $[\mathrm{G} : \mathrm{A}]$.

□

7.2 Prodotto semidiretto

Sia ora G un gruppo e siano A e H due suoi sottogruppi tali che A sia normale e abeliano e G sia il prodotto semidiretto di H per A. Vedremo che le rappresentazioni irriducibili di G possono essere costruite a partire da alcuni sottogruppi di H, attraverso quello che viene chiamato metodo dei "gruppi piccoli" di Wigner e Mackey. Siccome A è abeliano, i suoi caratteri irriducibili sono di grado 1 e formano un gruppo $\mathrm{X} = \mathrm{Hom}(\mathrm{A}, \mathbb{C}^*)$. Il gruppo G agisce su X nella maniera seguente:

$$(s\chi)(a) = \chi(s^{-1}as), \qquad \text{per ogni } s \in \mathrm{G}, \chi \in \mathrm{X}, a \in \mathrm{A}.$$

Sia $(\chi_i)_{i\in \mathrm{X/H}}$ un insieme di rappresentanti delle orbite di H in X. Per ogni $i \in \mathrm{X/H}$, sia H_i il sottogruppo di H formato dagli elementi h tali per cui $h\chi_i = \chi_i$ e sia $\mathrm{G}_i = \mathrm{A} \cdot \mathrm{H}_i$ il corrispondente sottogruppo di G. Estendiamo la funzione χ_i a G_i come segue

$$\chi_i(ah) = \chi(a), \qquad \text{per ogni } a \in \mathrm{A}, h \in \mathrm{H}_i,$$

questo per ogni $i \in \mathrm{X/H}$. Usando il fatto che $h\chi_i = \chi_i$ per ogni $h \in \mathrm{H}_i$, si vede che χ_i è un carattere di grado 1 di G_i, per ogni $i \in \mathrm{X/H}$. Sia ora ρ una rappresentazione irriducibile di H_i; componendo ρ con la proiezione canonica $\mathrm{G}_i \to \mathrm{H}_i$ si ottiene una rappresentazione irriducibile $\tilde{\rho}$ di G_i, per ogni $i \in \mathrm{X/H}$. Infine, per ogni $i \in \mathrm{X/H}$, considerando il prodotto tensoriale di χ_i e $\tilde{\rho}$, si ottiene la rappresentazione irriducibile $\chi_i \otimes \tilde{\rho}$ di G_i. Sia $\theta_{i,\rho}$ la corrispondente rappresentazione indotta di G.

Proposizione 7.2.1. *Sia* G *un gruppo come nelle ipotesi precedenti. Usando la stessa notazione, si ha che, per ogni* $i, i' \in \mathrm{X/H}$,

(i) $\theta_{i,\rho}$ *è irriducibile;*

(ii) *se* $\theta_{i,\rho}$ *e* $\theta_{i',\rho'}$ *sono isomorfe, allora* $i = i'$ *e* ρ *è ismorfa a* ρ'*;*

(iii) *ogni rappresentazione irriducibile di* G *è isomorfa a una delle rappresentazioni* $\theta_{i,\rho}$.

Dimostrazione.

(i) Viene usato il criterio di irriducibilità di Mackey (Proposizione 6.4.1) come segue. Sia $s \notin \mathrm{G}_i$ e sia $\mathrm{K}_s = \mathrm{G}_i \cap s\mathrm{G}_i s^{-1}$. Bisogna mostrare che, componendo la rappresentazione $\chi_i \otimes \tilde{\rho}$ di G_i con le due funzioni iniettive $\mathrm{K}_s \to \mathrm{G}_i$ definite da $x \mapsto x$ e $x \mapsto s^{-1}xs$, otteniamo due rappresentazioni disgiunte di K_s. Per fare ciò, è sufficiente controllare che le due rispettive restrizioni al sottogruppo A di K_s siano disgiunte. Ma la prima si restringe a un multiplo di χ_i e la seconda a un multiplo di $s\chi_i$; siccome $s \notin \mathrm{A} \cdot \mathrm{H}_i$, si ha che $s\chi_i \neq \chi_i$ e le due rappresentazioni sono quindi disgiunte.

(ii) La restrizione di $\theta_{i,\rho}$ ad A coinvolge solamente i caratteri χ che appartengono all'orbita $\mathrm{H}\chi_i$ di χ_i. Questo prova che $\theta_{i,\rho}$ determina i. Sia ora W lo spazio corrispondente alla rappresentazione $\theta_{i,\rho}$ e sia W_i l'insieme degli elementi $x \in \mathrm{W}$ tali per cui $\theta_{i,\rho}(a)x = \chi_i(a)x$ per ogni $a \in \mathrm{A}$. Il sottospazio W_i è stabile sotto l'azione di H_i e si controlla facilmente che la rappresentazione di H_i in W_i è isomorfa a ρ; da ciò segue che $\theta_{i,\rho}$ determina ρ.

(iii) Sia $\sigma : \mathrm{G} \to \mathbf{GL}(\mathrm{W})$ una rappresentazione irriducibile di G. Sia $\mathrm{W} = \oplus_{\chi\in \mathrm{X}} \mathrm{W}_\chi$ la decomposizione canonica di $\mathrm{Res}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{W})$. Esiste un χ tale che W_χ sia non nullo; se $s \in \mathrm{G}$, $\sigma(s)$ manda W_χ in $\mathrm{W}_{s(\chi)}$. Sia $i \in \mathrm{X/H}$ tale che $\chi \in \chi_i$. Il gruppo H_i mappa W_{χ_i} in se stesso; sia W_i un sotto-$\mathbb{C}[\mathrm{H}_i]$-modulo di H_{χ_i} irriducibile e sia ρ la corrispondente rappresentazione di H_i. È chiaro che la rappresentazione di $\mathrm{G}_i = \mathrm{A} \cdot \mathrm{H}_i$ è isomorfa a $\chi_i \otimes \tilde{\rho}$. Perciò la restrizione di σ a G_i contiene almeno una volta la rappresentazione $\chi_i \otimes \tilde{\rho}$. Per la Proposizione 6.2.4, segue che σ compare almeno una volta nella rappresentazione indotta $\theta_{i,\rho}$; siccome $\theta_{i,\rho}$ è irriducibile, questo implica che le rappresentazioni σ e $\theta_{i,\rho}$ sono isomorfe.

□

Bibliografia

[1] Artin M., *Algebra*. Prentice Hall, 1991.

[2] Canonaco A., *Moduli su un Anello*. Dispense del corso di Algebra 2 presso l'Università degli Studi di Pavia, 13 maggio 2019.

[3] Pierce R. S., *Associative Algebras*. New York, Springer-Verlag, 1982.

[4] Serre J. P., *Linear representations of finite groups*. Springer-Verlag, 1977.

Ringraziamenti

Desidero ringraziare sinceramente il professor Canonaco per avermi seguito nella stesura di questo elaborato e tutti coloro che hanno contribuito a rendere speciale questo mio percorso: i professori che ho avuto il piacere di incontrare in questi tre anni, la mia famiglia, i miei amici.